Aritmética de Curvas Elípticas
1er. Cuatrimestre 2014
Guía 5 - Formas Modulares

El objetivo de esta guía es completar algunas propiedades que quedaron en clase. Recordar que las formas modulares para $S_k(\Gamma_0(N))$ las podíamos identificar con funciones $F : (L, t) \to \mathbb{C}$, donde L es un retículo, y t es un subgrupo de $\mathbb{C}/L$ de orden N (dicho de otra forma, pares (E, t), donde E es una curva elíptica, y t un subgrupo de E de orden N), que satisfacen $F(\lambda L, \lambda t) = \lambda^{-k} F(L, t)$.

Así definimos los operadores de Hecke T_n, si $(n : N) = 1$, como

$$(T_n F)(L, t) = \frac{1}{n} \sum_{L'} F(L', t),$$

donde la suma es sobre los retículos $L' \supset L$ con índice n.

1. Sea $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$, y sea p un númeor primo coprimo con N. Probar que si $(p : n) = 1$ entonces $T_n(f(pz)) = (T_n f)(pz)$.
   Deducir que si $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$ es autofunción para los operadores de Hecke T_n con $(n : N) = 1$, entonces tanto $f(z)$ como $f(pz)$ son dos funciones en $S_k(\Gamma_0(Np))$ linealmente independientes, que son autofunciones para los operadores de Hecke T_n, $(n : Np) = 1$ con los mismos autovalores (con lo cual no hay multiplicidad 1).

Siguiendo lo hecho en clase, definimos el operador de Hecke T_n en general, como

$$(T_n F)(L, t) = \frac{1}{n} \sum_{L'} F(L', t),$$

pero donde la suma es sobre los retículos $L' \supset L$ con índice n y tal que t tiene orden N en $\mathbb{C}/L'$ (esta condición es automática si $(n : N) = 1$).

2. Probar que si $p \mid N$, entonces $T_{p^r} = T_p^r$ (o sea componer r-veces T_p consigo mismo).
3. Si $(m : n) = 1$ entonces $T_{mn} = T_m T_n$ siempre.
4. Sea $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$, con expansión de Fourier $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$. Sea p un número primo tal que $p \mid N$. Probar que $T_p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} q^n$.
   Deducir que si f es autofunción para T_p con autovalor λ_p, entonces
   $$a_1 \lambda_p = a_p.$$
5. Sea $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$ no nula una autofunción para el operador de Hecke T_p con autovalor λ_p, donde p es un primo coprimo con N. Usando la acción de los operadores de Hecke en expansiones de Fourier, probar que el operador de Hecke T_p actuando en las formas (linealmente independientes) $\{f(z), f(pz)\}$ de $S_k(\Gamma_0(Np))$ tiene matriz
   $$\begin{pmatrix} \lambda_p & -p^{k-1} \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$
   Deducir que el operador de Hecke T_p no se diagonaliza en este espacio.