Optimización Semidefinida - Segundo Cuatrimestre 2021

Práctica 2 - Introducción SDP

Para entregar: entregar un ejercicio a elección entre los marcados ($\diamondsuit$).

Primeros pasos en Mosek

1. (Mosek) Calcular el menor autovalor de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

resolviendo en Mosek el problema SDP

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar:} & \eta \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A} - \eta I \succeq 0. \end{array}$$

2. (Mosek) Vimos en la primera clase que para determinar si

$$f(x) = 10x^4 + 2x^3 + 27x^2 - 24x + 5 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que determinar si existe $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que

$$\begin{array}{l} a_{11} = 5, \quad 2a_{12} = -24, \quad 2a_{13} + a_{22} = 27, \quad 2a_{23} = 2, \quad a_{33} = 10, \\ \boldsymbol{A} \succeq 0. \end{array}$$

Resolver en Mosek este problema SDP, calculando el máximo de a_{22} sujeto a las restricciones dadas.

Matrices simétricas

3. Dada una matriz simétrica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar

   (a) $\boldsymbol{A}^n$ es simétrica para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $\boldsymbol{A}^{-1}$ es simétrica.

   (c) Si $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, $\boldsymbol{AB}$ es simétrica si y solo si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ conmutan ($\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$).

4. Para el producto interno usual $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$, probar que una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si y solo si

$$\boldsymbol{Ax} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{Ay}$$

para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

5. Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica con $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ base ortonormal de autovectores correspondiente a los autovalores $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, probar que

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T.$$

6. (Resolver a mano o en Python) Para la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

   (a) Hallar una factorización $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T$ con $\boldsymbol{U}$ ortogonal y $\boldsymbol{D}$ diagonal.
   (b) Hallar mediante diagonalización simultánea de filas y columnas una matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ diagonal congruente a $\boldsymbol{A}$. Determinar una matriz $\boldsymbol{S}$ tal que $\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{B}$.
   (c) Verificar que las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ halladas tienen la misma signatura.
   (d) Escribir a la matriz $\boldsymbol{A}$ como suma de matrices simétricas de rango 1.

Matrices definidas positivas

7. Dadas matrices simétricas $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^m$, definimos la matriz $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ por

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

   Probar que $\boldsymbol{A} \succeq 0$ y $\boldsymbol{B} \succeq 0$ si y solo si $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} \succeq 0$.

8. Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n$ es semidefinida positiva y $a_{ii} = 0$, probar que $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

9. Probar que una matriz semidefinida positiva $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene rango 1 si y solo si

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$$

   para algún vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

10. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n$ una matrix semidefinida positiva y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Probar que

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0 \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0.$$

11. (Complemento de Schur.) Sea $\boldsymbol{X}$ una matriz simétrica definida por bloques

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

   con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\boldsymbol{A}$ no-singular. Probar que

$$\boldsymbol{X} \succeq 0 \iff \boldsymbol{A} \succeq 0 \text{ y } \boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \succeq 0.$$

   Sugerencia: probar que

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}, \text{ con } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

12. Para las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinar cuáles son semidefinidas positivas y encontrar una factorización $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t$ para las que lo sean.
   (b) Determinar cuáles son definidas positivas y calcular la factorización de Cholesky para las que lo sean.

Conos y espectrahedros

13. Probar que el conjunto

$$\mathcal{L}^{n+1} = \left\{ (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq t \right\}$$

es un cono y determinar si es puntiagudo.

Realizar un gráfico aproximado de $\mathcal{L}^3$.

14. Graficar en $\mathbb{R}^2$ el espectrahedro dado por

$$S = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

15. Graficar en $\mathbb{R}^2$ el espectrahedro dado por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}.$$

16. ¿A qué objeto geométrico corresponde el espectrahedro en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1+x & y & 0 & 0 \\ y & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}?$$

17. Ingresar el siguiente código en Python para realizar el gráfico de una curva dada en forma implícita.

```
from sympy import var, plot_implicit
var('x y')
plot_implicit(x**2 + x**3 - y**2)
```

18. ($\diamondsuit$) Considerar el espectrahedro en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{A}(x, y) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & y \\ 0 & 2 & -x-1 \\ y & -x-1 & 2 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

   (a) Calcular el determinante de $\boldsymbol{A}(x, y)$ y el polinomio característico.
   (b) Graficar en Python las soluciones de $\det(\boldsymbol{A}(x, y)) = 0$.
   (c) Determinar el gráfico del espectrahedro S.

19. ($\diamondsuit$) Graficar (con la ayuda de Python) el espectrahdro en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{A}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x+y \\ x & 1 & y \\ x+y & y & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

Problemas de programación semidefinida

20. Resolver (a mano) el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar:} \quad & x_{11} \\ \text{sujeto a:} \quad & \begin{pmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

¿Se alcanza el ínfimo hallado?

21. ($\diamondsuit$) Resolver (a mano o en Mosek) los problemas SDP

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar:} & y \\ \text{sujeto a:} & \begin{pmatrix} 5 & -12 & y \\ -12 & 27-2y & 1 \\ y & 1 & 10 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximizar:} & y \\ \text{sujeto a:} & \begin{pmatrix} 5 & -12 & y \\ -12 & 27-2y & 1 \\ y & 1 & 10 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{array}$$

A partir de los resultados hallados, determinar el espectrahedro del conjunto factible.

22. ($\diamondsuit$) Para el problema SDP primal:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar:} & 2x_{11} + 2x_{12} \\ \text{sujeto a:} & x_{11} + x_{22} = 1, \\ & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array}$$

(a) Resolver el problema.

(b) Plantear el problema dual.

(c) Resolver el problema dual y calcular el salto de dualidad.

23. Resolver el par de problemas SDP primal/dual y calcular el salto de dualidad.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar:} & \alpha x_{11} \\ \text{sujeto a:} & x_{22} = 0, \\ & x_{11} + 2x_{23} = 1, \\ & \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \succeq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximizar:} & y_2 \\ \text{sujeto a:} & \begin{pmatrix} y_2 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & y_2 & 0 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

24. Considerar el par de problemas SDP primal/dual:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar:} & x_{11} \\ \text{sujeto a:} & 2x_{12} = 1, \\ & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximizar:} & y \\ \text{sujeto a:} & \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Resolver ambos problemas y calcular el salto de dualidad.

(b) ¿Se alcanza el óptimo en ambos problemas?