Optimización Semidefinida - Segundo Cuatrimestre 2021

Práctica 4 - Sumas de cuadrados

Para entregar: entregar un ejercicio a elección entre los marcados ($\diamondsuit$).

1. Calcular las raíces de
$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 22x + 13$$
y obtener una descomposición de $p(x)$ como suma de cuadrados.

2. Encontrar una descomposición como suma de cuadrados de
$$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5$$
resolviendo a mano el problema SDP asociado.

3. Un polinomio trigonométrico de grado d es una expresión de la forma
$$p(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{d} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$
   (a) Probar que si $p(\theta)$ es un polinomio trigonométrico de grado $2d$ y $p(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, entonces p admite una descomposición
$$p(\theta) = q_1^2(\theta) + q_2^2(\theta)$$
   con q_1, q_2 polinomios trigonométricos.

   (b) Plantear un problema SDP para determinar un polinomio trigonométrico $p(\theta)$ de grado $2d$ satisface $p(\theta) \geq 0$ para todo θ.

   (c) Hallar una descomposición como suma de cuadrados de polinomios trigonométricos de la función
$$p(\theta) = 4 - \sin(\theta) + \sin(2\theta) - 3\cos(2\theta).$$

4. (*) ($\diamondsuit$) Demostrar un polinomio de grado 2 en n variables es positivo si y solo si se puede escribir como una suma de cuadrados.

5. (*) Demostrar que el problema de determinar si un polinomio es positivo (o no-negativo) es un problema NP-hard, reduciendo otro problema NP-hard a este problema.

6. Calcular a mano una escritura como suma de cuadrados para el polinomio
$$p(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2^2 + x_2^4 + 1.$$

7. Hallar fórmulas combinatorias para la cantidad de monomios de grado d en n variables y para la cantidad de monomios de grado menor o igual que d en n variables.

8. Utilizando Mosek, obtener una descomposición como suma de cuadrados de
$$p(x, y, z, w) = 2x^4 + x^2y^2 + y^4 - 4x^2 - 4xyz - 2y^2w + y^2 - 2yz + 8z^2 - 2zw + 2w^2.$$

9. ($\diamondsuit$) **Descomposición de polinomios homogéneos.**

   (a) Implementar en Mosek un programa para determinar si un polinomio homogéneo de grado $2d$ en n variables admite una descomposición como suma de cuadrados resolviendo el problema SDP $p = \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{Q} \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{Q} \succeq 0$, con $\boldsymbol{v}$ el vector de monomios de grado d en n variables.

   (b) Utilizar el programa para determinar si el polinomio

   $$p(x, y, z) = 2(x^6 + y^6 + z^6) - 2(x^4y^2 + x^4z^2 + y^4x^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2) + 6x^2y^2z^2$$

   admite una descomposición como suma de cuadrados.

   (c) Hallar $\beta_1 > 0$ tal que $p(x, y, z) + \beta(x^6 + y^6 + z^6)$ sea una suma de cuadrados.

10. En el ejercicio anterior, hallar $\beta_2 > 0$ tal que $p(x, y, z) + \beta(x^6 + y^6 + z^6)$ no sea una suma de cuadrados.

11. Considerar el polinomio $f \in \mathbb{R}[x, y, z]_6$,

    $$p = x^6 + y^6 + 7(x^4 + y^4)z^2 + 18x^2y^2z^2 - 23(x^2 + y^2)z^4 + 16z^6$$

    Verificar en Mosek mediante distintas funciones objetivo que existe una única matriz $\boldsymbol{Q} \succeq 0$ tal que $p = \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{Q} \boldsymbol{v}$.

12. **(Descomposición racional)** Dado un polinomio $p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]_{2d}$, demostrar que p se puede escribir como una suma de cuadrados de polinomios en $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ si y solo si existe una matriz $\boldsymbol{Q}$ con entradas racionales en el espectrahedro de Gram de p (es decir una matriz racional $\boldsymbol{Q} \succeq 0$ tal que $p = \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{Q} \boldsymbol{v}$ para $\boldsymbol{v}$ el vector de monomios de grado d).

13. Dado un polinomio $p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]_{2d}$, probar que si el problema $p = \boldsymbol{v}^t \boldsymbol{Q} \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{Q} \succeq 0$, es estrictamente factible, entonces p admite una descomposición como suma de cuadrados con coeficientes racionales.

14. ($\diamondsuit$) Resolver utilizando Mosek el siguiente problema SOS

    $$\begin{array}{ll} \text{maximizar:} & y_1 + y_2 \\ \text{sujeto a:} & x^4 + y_1 x + (2 + y_2) \quad \text{es SOS,} \\ & (y_1 - y_2 + 1)x^2 + y_2 x + 1 \quad \text{es SOS.} \end{array}$$

15. ($\diamondsuit$) Plantear el problema de hallar el mínimo global de la función

    $$q(x) = \frac{x^3 - 8x + 1}{x^4 + x^2 + 12}$$

    como un programa SOS. Resolver el problema en Mosek.

Los ejercicios marcados (*) son optativos y pueden involucrar temas no vistos en la materia.