Optimización Semidefinida
Clase 09 - Teoría de control

Segundo Cuatrimestre 2021

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Teoría de control

La teoría del control es un campo interdisciplinario de la ingeniería y las matemáticas, que trata el comportamiento de sistemas dinámicos.

El objetivo es desarrollar un modelo o algoritmo que regule la aplicación de estímulos sobre el sistema, para alcanzar un estado deseado, minimizando la demora o el costo o el error, y asegure un cierto nivel de estabilidad.

Para lograrlo, se utiliza un controlador con el comportamiento corrector requerido.

Sistemas de lazo abierto y lazo cerrado

Los sistemas se pueden dividir en dos tipos:

- *sistemas de lazo abierto*, en los que la acción del controlador es independiente de las variables de salida del proceso
- *sistemas de lazo cerrado*, en los que el controlador se retroalimenta de las variables de salida del proceso para determinar las acciones de control

Ejemplos

Sistemas de lazo abierto

- Sistema de calefacción central en el que el calefactor se enciende a intervalos regulares de tiempo sin importar la temperatura del ambiente.
- Sistema *crucero* de un auto, en el que el acelerador queda fijo en una determinada posición. La velocidad del auto puede variar según las condiciones de la ruta.

Sistemas de lazo cerrado

- Sistema de calefacción central en el que el calefactor se enciende o apaga mediante un termostato que mide la temperatura.
- Sistema *crucero* de un auto, en el que la posición del acelerador varía según las condiciones de la ruta, para mantener la velocidad constante.

Equilibrio de sistemas dinámicos

Consideramos un sistema dinámico autónomo

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = f(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

donde $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ denota el vector de estado del sistema, $\mathcal{D}$ es un conjunto abierto que contiene al origen y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en $\mathcal{D}$ que no depende explícitamente de t.

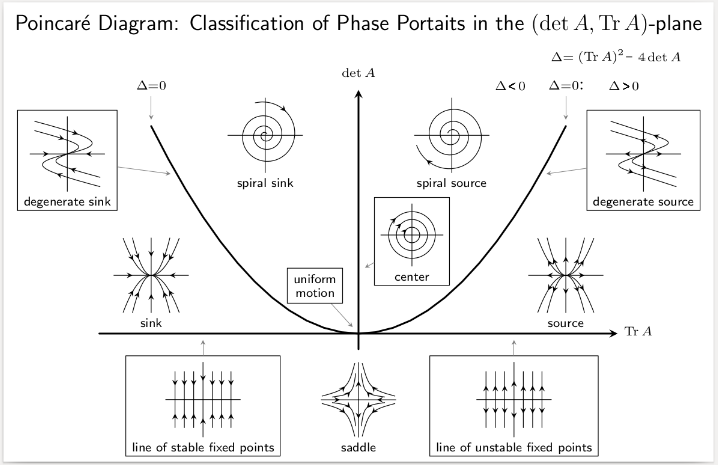
Si f tiene un punto de equilibro en $\boldsymbol{x}_e$ (por lo tanto $f(\boldsymbol{x}_e) = 0$),

- el equilibrio se dice *estable* si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e\| < \delta$, entonces para todo $t \geq 0$ tenemos $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| < \epsilon$.
- el equilibrio se dice *asintóticamente estable* si es estable y existe $\delta > 0$ tal que si $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e\| < \delta$, entonces $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| = 0$.

Ejemplo

- El sistema
$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t), \quad x(0) = 1,$$
tiene solución $x(t) = e^{-t}$, el equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente estable.
- El sistema
$$\frac{d}{dt}x(t) = 3x(t), \quad x(0) = 1,$$
tiene solución $x(t) = e^{3t}$, el equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente inestable.
- El sistema
$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (-y(t), x(t)), \quad (x(0), y(0)) = (a, 0),$$
tiene solución $(x(t), y(t)) = a(\cos(t), \sin(t))$, el equilibrio $(x_e, y_e) = (0, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

Clasificación de los estados de equilibrio



Sistemas autónomos lineales discretos

Consideremos una relación de recurrencia lineal,

$$\boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k], \quad \boldsymbol{x}[0] = \boldsymbol{x}_0,$$

con $\boldsymbol{x}[k] \in \mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Esta relación es un ejemplo simple de un sistema dinámico discreto, el estado $\boldsymbol{x}[k]$ evoluciona con el tiempo a partir de un estado inicial $\boldsymbol{x}[0]$.

El análogo continuo está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t).$$

Estos modelos son utilizados para modelar la evolución en el tiempo de cantidades tales como temperatura, tamaño de la población, etc.

Sistemas autónomos lineales discretos

Queremos determinar condiciones sobre la matriz $\boldsymbol{A}$ que permitan garantizar que el vector de estado $\boldsymbol{x}[k]$ se mantenga acotado o converja a 0.

Calculando autovalores y autovectores, sabemos que $\boldsymbol{x}[k]$ converge a 0 para todo estado inicial si y solo si el radio espectral $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$, es decir si los autovalores λ_i de $\boldsymbol{A}$ cumplen $|\lambda_i| < 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

En este caso decimos que el sistema (o la matriz $\boldsymbol{A}$) es asintóticamente estable.

Estabilidad de sistemas dinámicos autónomos discretos

Veremos ahora una forma alternativa de estudiar el problema, que resulta en ciertas ocasiones más conveniente. Vamos a considerar una generalización y abstracción de la idea de energía, que se conoce como *función de Lyapunov*.

Para una matriz $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ semidefinida positiva, definimos la función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$V(\boldsymbol{x}[k]) = \boldsymbol{x}[k]^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}[k].$$

Vamos a ver que el sistema es asintóticamente estable si existe $\boldsymbol{P} \succ 0$ tal que V es decreciente sobre las trayectorias del sistema.

Es decir, si

$$V(\boldsymbol{x}[k+1]) < V(\boldsymbol{x}[k])$$

para cualquier estado $\boldsymbol{x}[k]$ no nulo.

Estabilidad de sistemas dinámicos autónomos discretos

Observamos primero que esto es equivalente a la desigualdad de matrices

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} \prec 0.$$

Probamos entonces el siguiente resultado.

Teorema

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$
2. *Existe una matrix $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica tal que*

$$\boldsymbol{P} \succ 0, \qquad \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} \prec 0.$$

Demostración

$2 \Rightarrow 1$: Dado $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{v} \neq 0$, autovector de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$,

$$0 > \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{v} = (|\lambda|^2 - 1)\boldsymbol{v}^* \boldsymbol{P} \boldsymbol{v},$$

donde $\boldsymbol{v}^* \boldsymbol{P} \boldsymbol{v} > 0$ y por lo tanto $|\lambda| < 1$.

$1 \Rightarrow 2$: Tomamos $\boldsymbol{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{A}^k)^T \boldsymbol{A}^k$ (como $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$, la suma converge). Luego

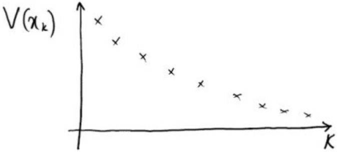
$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} = \sum_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{A}^k)^T \boldsymbol{A}^k - \sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{A}^k)^T \boldsymbol{A}^k = -\boldsymbol{I} \prec 0.$$

Demostración alternativa "conceptual"

Consideramos la función $V(\boldsymbol{x}[k]) = \boldsymbol{x}[k]^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}[k]$, $\boldsymbol{P} \succ 0$, que satisface

$$0 \leq V(\boldsymbol{x}[k+1]) < V(\boldsymbol{x}[k]).$$

Como la sucesión $V(\boldsymbol{x}[k])$ es decreciente y no-negativa, converge a un límite $c \geq 0$.

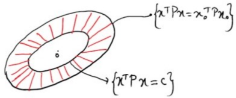


Si $c = 0$, $V(\boldsymbol{x}[k]) \to 0$ implica $\boldsymbol{x}[k] \to 0$.

Demostración alternativa "conceptual"

Veamos que no puede pasar $c > 0$. En efecto, si $c > 0$, las trayectorias quedarían contenidas en el disco

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid c \le \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}_0^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}_0\}.$$



Ahora consideramos $\delta = \min_{\boldsymbol{x} \in S} V(\boldsymbol{x}) - V(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$.

Como la función es continua y positiva y S es compacto, δ existe y es positivo. Por lo tanto, en cada iteración $V(\boldsymbol{x}[k])$ decrece al menos δ, y tendríamos $\{V(x_k)\} \to -\infty$, una contradicción.

Problema SDP con ecuaciones homogéneas

De esta forma convertimos el problema en un problema de factibilidad de SDP.

Observamos que las coordenadas de la matriz $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}$ son lineales afines en los coeficientes de $\boldsymbol{P}$, por lo tanto el problema es efectivamente un problema SDP.

Si $\boldsymbol{P}$ es solución factible, entonces $\alpha\boldsymbol{P}$ es factible para todo $\alpha \geq 0$. Decimos que las ecuaciones son homogéneas.

Esto trae dificultades para elegir la función objetivo:

- Si por ejemplo, la función objetivo es $\max p_{11}$ y el problema es estrictamente factible, este máximo es infinito.
- Si la función objetivo es $\min p_{11}$ este mínimo es 0, por ejemplo tomando $\boldsymbol{P}=\mathbf{0}$, que no es estrictamente factible ni nos da ninguna información.

Problema SDP

Para evitar estos problemas y obtener una solución estrictamente factible, agregamos la condición

$$\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I} \succeq 0$$

Esta condición es equivalente a pedir $\lambda \geq 1$ para todo λ autovalor de $\boldsymbol{P}$. Como las ecuaciones son homogéneas, si el problema es estrictamente factible, siempre existe $\boldsymbol{P}$ con esta propiedad.

Obtenemos el problema SDP

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar:} & p_{11} \\ \text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} \succ 0, \\ & \boldsymbol{P} - \boldsymbol{I} \succeq 0, \quad \boldsymbol{P} \succ 0 \end{array}$$

(la última condición $\boldsymbol{P} \succ 0$ es redundante y podemos ignorarla).

Equilibrio Lyapunov estable

En el problema anterior, vamos a encontrar una solución $\boldsymbol{P} \succeq \boldsymbol{I}$ y por lo tanto $\boldsymbol{P} \succ 0$,

Para resolver numéricamente el problema, podemos reemplazar la restricción $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} \succ 0$ por

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} \succeq 0.$$

Verificando la demostración del teorema, observamos que en este caso solo podemos asegurar $\rho(\boldsymbol{A}) \leq 1$ y no necesariamente $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$.

La solución en este caso puede ser estable pero no necesariamente asintóticamente inestable. Es común llamar *Lyapunov estable* a este caso.

Número de condición bajo

Definimos el número de condición de una matriz $\boldsymbol{P}$ definida positiva como

$$\kappa(\boldsymbol{P}) = \lambda_{\text{máx}}/\lambda_{\text{mín}} \geq 1.$$

Un número de condición cercano a 1 indica que la matriz tiene buenas propiedades numéricas.

En vez de minimizar p_{11}, una condición natural es pedir que el número de condición sea lo más chico posible. Como la restricción $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}$ fuerza $\lambda \geq 1$ para todo autovalor, buscamos $\boldsymbol{P}$ con $\lambda_{\text{máx}}$ lo más chico posible. Obtenemos

$$\begin{aligned} \text{minimizar:} \quad & \eta \\ \text{sujeto a:} \quad & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} \succ 0, \\ & \boldsymbol{P} - \boldsymbol{I} \succeq 0, \\ & \eta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} \succeq 0 \end{aligned}$$

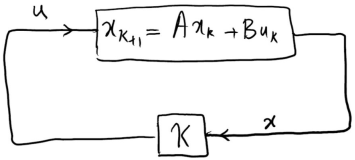
Diseño de control

Consideramos ahora una extensión del problema anterior en la que agregamos una señal de control $\boldsymbol{u}[k] \in \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k], \quad \boldsymbol{x}[0] = \boldsymbol{x}_0,$$

con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. La función del término de control es poder ajustar el comportamiento de $\boldsymbol{x}[k]$ para lograr un cierto objetivo.

Analizamos el caso en que $\boldsymbol{A}$ no es estable, pero podemos usar un control lineal $\boldsymbol{u}[k] = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}[k]$ para una matriz fija $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (a elegir apropiadamente).



Ejemplo

En este caso, podemos escribir el sistema de la forma

$$\boldsymbol{x}[k+1] = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}[k], \quad \boldsymbol{x}[0] = \boldsymbol{x}_0,$$

que es equivalente al problema original reemplazando a la matriz $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$.

Este es un problema de una dificultad mayor al anterior, debido a que los autovalores de $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ dependen en forma no-lineal de los autovalores de la matriz a calcular $\boldsymbol{K}$.

Sin embargo, vamos a ver que podemos resolver este problema por optimización semidefinida usando la caracterización alternativa de Lyapunov.

Forma matricial

Tenemos que determinar si existen $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{K}$ tales que

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})-\boldsymbol{P}\prec 0, \quad \boldsymbol{P}\succ 0.$$

Recordemos que por complementos de Schur, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\succ 0$ si y solo si

$$\boldsymbol{A}\succ 0 \text{ y } \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\succ 0.$$

Utilizando esta propiedad, podemos reescribir las condiciones como

Forma matricial

Tenemos que determinar si existen $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{K}$ tales que

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})-\boldsymbol{P}\prec 0, \quad \boldsymbol{P}\succ 0.$$

Recordemos que por complementos de Schur, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\succ 0$ si y solo si

$$\boldsymbol{A}\succ 0 \text{ y } \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\succ 0.$$

Utilizando esta propiedad, podemos reescribir las condiciones como

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) & \boldsymbol{P}\end{pmatrix}\succ 0.$$

Esta formulación no es un problema SDP debido a los términos no-lineales en las entradas de $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{P}$, las matrices a calcular.

Forma matricial

Sin embargo, definiendo $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$ y multiplicando a izquierda y derecha por la matriz

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

obtenemos la restricción equivalente

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T \\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^T + (\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q})^T\boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \succ 0
\end{aligned}$$

(en la última igualdad utilizamos que $\boldsymbol{Q}$ es simétrica).

Forma matricial

Si bien parece que no ganamos mucho con esta transformación, observamos ahora que la matriz $\boldsymbol{K}$ siempre aparece multiplicada por $\boldsymbol{Q}$ a derecha.

Por lo tanto, definiendo $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}$, obtenemos la condición

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \succ 0. \tag{1}$$

En este caso el problema es lineal en las variables $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y})$, y por lo tanto es un problema SDP.

Luego de resolver este problema, podemos recuperar la matriz $\boldsymbol{K}$ por la fórmula $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Y}$.

Forma matricial

Resumimos lo obtenido en el siguiente resultado.

Teorema

Dadas matrices $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, existe una matriz $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ es asintóticamente estable si y solo si el espectrahedro definido por la ecuación (1) es no vacío, es decir, existen matrices $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y})$ tales que se satisface la desigualdad matricial estricta.

Concluimos entonces que el problema de control planteado es equivalente a un problema de programación semidefinida.

Problema SDP

Obtenemos, para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dadas, el problema

$$
\begin{aligned}
\text{existe:} \quad & \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
\text{sujeto a:} \quad & \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \succ 0, \\
& \boldsymbol{Q} \succ 0.
\end{aligned}
$$

Al igual que en el caso anterior, para obtener una matrix $\boldsymbol{Q} \succ 0$ bien condicionada, utilizamos el programa

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar:} \quad & \eta \\
\text{sujeto a:} \quad & \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \succ 0, \\
& \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I} \succeq 0, \quad \eta\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} \succeq 0, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{m\times n}.
\end{aligned}
$$

Caso continuo

Consideramos un sistema dinámico autónomo

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = f(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

y suponemos que se cumple

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \in \operatorname{conv}\{\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m\}\boldsymbol{x}(t),$$

donde $\operatorname{conv}\{\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m\} = \{\alpha_1 \boldsymbol{A}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{A}_m : 0 \le \alpha_i \le 1, \sum \alpha_i = 1\}$.

Ejemplo. Si $m = 1$, obtenemos el sistema $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$.

La condición más general nos permite indicar que las derivadas se mueven en ciertos rangos.

Caso continuo

Queremos determinar si $\boldsymbol{x}(t)$ se mantiene acotada, es decir, si el equilibrio $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es estable.

Observamos que $\boldsymbol{x}(t)$ se mantiene acotada si y solo si existe $\boldsymbol{P} \succ 0$ tal que

$$v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$$

se mantiene acotada sobre las trayectorias.

Una condición para asegurar esto es pedir que v sea no creciente sobre las trayectorias.

Llamamos a estas funciones como *funciones de Lyapunov*.

Caso continuo

Utilizando la regla de derivación de un producto interno para $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = \dot{f}(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot \dot{g}(t),$$

obtenemos que $\boldsymbol{x}(t)$ se mantiene acotada si

$$\dot{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \dot{\boldsymbol{x}} \leq 0.$$

Si $\boldsymbol{x}(0)$ es arbitrario y $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ puede estar en cualquier punto del conjunto convexo, necesitamos

$$\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_i \preceq 0, \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq m.$$

Problema SDP

Las restricciones obtenidas corresponden a un problema SDP.

Si buscamos $\boldsymbol{P} \succ 0$ bien condicionada, definimos el siguiente problema SDP:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar:} & \eta \\
\text{sujeto a:} & \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_i \preceq 0, \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq m \\
& \eta \boldsymbol{I} \succeq \boldsymbol{P} \succeq \boldsymbol{I}
\end{array}
$$

donde las variables del problema son η y las entradas de $\boldsymbol{P}$.