

1 Análisis Multivariado I - Práctica 0

1.1 Repaso de Álgebra Lineal

1. Probar que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ y $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Mostrar que los autovalores no nulos de AB coinciden con los de BA . (Si las matrices son cuadradas, los nulos también coinciden).
3. Sea A una matriz simétrica de $d \times d$.

(a) Probar que todos sus autovalores son reales. Si llamamos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$ a estos autovalores, mostrar que:

- $tr(A) = \sum_{i=1}^d \lambda_i$
- $|A| = \prod_{i=1}^d \lambda_i$
- $|I \pm A| = \prod_{i=1}^d (1 \pm \lambda_i)$

(b) $A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \ \forall i$.

(c) $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \ \forall i$.

(d) $A \geq 0$ y $|A| \neq 0 \Rightarrow A > 0$.

(e) $A > 0 \Rightarrow A^{-1} > 0$.

(f) $A > 0 \Leftrightarrow$ existe $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ no singular tal que $A = RR^T \Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tal que si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$ con $\lambda_i > 0 \ \forall i$ entonces $A = B\Lambda B^T$ (es lo que se denomina *descomposición espectral* de A).

(g) $A \geq 0$ de rango $r \Leftrightarrow$ existe $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ de rango r tal que $A = RR^T \Leftrightarrow$ existe una matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tal que si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$ con $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$ entonces $A = B\Lambda B^T$.

4. Una matriz P de $d \times d$ se dice *de proyección* si es simétrica e idempotente (es decir, $P^2 = P$). Probar que:

(a) $rg(P) = r \Leftrightarrow \lambda_i = 1$ para $i = 1, \dots, r$ y $\lambda_i = 0$ para $i = r+1, \dots, d$. Entonces $P = \sum_{i=1}^r \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i^T$ para ciertos \mathbf{t}_i ortonormales. ¿Cómo queda la descomposición espectral en este caso?

(b) $rg(P) = tr(P)$.

(c) $I - P$ también es de proyección. ¿Qué rango tiene? ¿Sobre qué espacio proyecta?

5. Sea X de $n \times p$ y de rango p . Mostrar que $P = X(X^T X)^{-1} X^T$ es una matriz de proyección. ¿Sobre qué espacio proyecta?

1.2 Esperanza, varianza y covarianza de vectores aleatorios

1. Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores aleatorios (no necesariamente de la misma dimensión) probar que:

(a) $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) - \mathbb{E}(\mathbf{x})\mathbb{E}(\mathbf{y}^T)$.

(b) $\text{Cov}(A\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = A\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})B^T$.

(c) Si \mathbf{a} es un vector no aleatorio, $\text{VAR}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \text{VAR}(\mathbf{x})$.

(d) $\text{VAR}(A\mathbf{x}) = A\text{VAR}(\mathbf{x})A^T$.

2. Sea $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ una muestra de vectores aleatorios de dimensión d (m.a.) con dispersión Σ y $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}, \{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ escalares no aleatorios. Mostrar que:

(a) $\text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \Sigma$.

(b) $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{x}_j\right) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$.

3. Si $\mathbf{x} \sim (\mu, \Sigma)$ y A es simétrica, probar que $\mathbb{E}(\mathbf{x}^T A \mathbf{x}) = \text{tr}(A\Sigma) + \mu^T A \mu$.

4. Sea $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ una m.a. (μ, Σ) . Mostrar que:

(a) $\mathbb{E}(\bar{\mathbf{x}}) = \mu$ y $\text{VAR}(\bar{\mathbf{x}}) = \Sigma/n$.

(b) $\mathbb{E}(Q) = (n-1)\Sigma$, con $Q = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$