

## Álgebra I Práctica 7 - Polinomios

### Generalidades

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de  $f \in \mathbb{Q}[X]$  en los casos

i)  $f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$ .

ii)  $f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$ .

iii)  $f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$ .

2. Calcular el coeficiente de  $X^{20}$  de  $f$  en los casos

i)  $f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$  en  $\mathbb{Q}[X]$  y en  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ .

ii)  $f = (X - 3i)^{133}$  en  $\mathbb{C}[X]$ .

iii)  $f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7$  en  $\mathbb{Q}[X]$ .

iv)  $f = X^{10}(X^5 + 4)^7$  en  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ .

3. Hallar, cuando existan, todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que

i)  $f^2 = Xf + X + 1$ .

iii)  $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$ .

ii)  $f^2 - Xf = -X^2 + 1$ .

iv)  $f \neq 0$  y  $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2f$ .

4. Hallar el cociente y el resto de la división de  $f$  por  $g$  en los casos

i)  $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ ,  $g = X^2 + 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

ii)  $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$ ,  $g = 2X^3 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

iii)  $f = 4X^4 + X^3 - 4$ ,  $g = 2X^2 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

iv)  $f = X^5 + X^3 + X + 1$ ,  $g = 2X^2 + 1$  en  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ .

v)  $f = X^n - 1$ ,  $g = X - 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ .

5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que

i)  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$ .

ii)  $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$ .

iii) El resto de la división de  $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$ .

6. *Definición:* Sea  $K$  un cuerpo y sea  $h \in K[X]$  un polinomio no nulo. Dados  $f, g \in K[X]$ , se dice que  $f$  es congruente a  $g$  módulo  $h$  si  $h \mid f - g$ . En tal caso se escribe  $f \equiv g \pmod{h}$ .

Probar que

i)  $\equiv \pmod{h}$  es una relación de equivalencia en  $K[X]$ .

ii) Si  $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$  y  $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$  entonces  $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$  y  $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$ .

iii) Si  $f \equiv g \pmod{h}$  entonces  $f^n \equiv g^n \pmod{h}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

iv)  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $h$  si y sólo si  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $r = 0$  ó  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ .

v) ¿Qué se obtiene al trabajar con los polinomios de  $\mathbb{R}[X]$  módulo  $X^2 + 1$ ?

7. Hallar el resto de la división de  $f$  por  $h$  para

i)  $f = X^{353} - X - 1, \quad h = X^{31} - 2,$

ii)  $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1, \quad h = X^6 + 1,$

iii)  $f = X^{200} - 3X^{101} + 2, \quad h = X^{100} - X + 1,$

en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

8. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $a \in K$ . Probar que en  $K[X]$  valen:

i)  $X - a \mid X^n - a^n.$

ii) Si  $n$  es impar entonces  $X + a \mid X^n + a^n.$

iii) Si  $n$  es par entonces  $X + a \mid X^n - a^n.$

Calcular los cocientes en cada caso.

9. Calcular el máximo común divisor entre  $f$  y  $g$  y escribirlo como combinación lineal de  $f$  y  $g$  siendo

i)  $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1.$

ii)  $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X.$

iii)  $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3, \quad g = X^4 + 2X + 1.$

### Evaluación y raíces

10. Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1) = -2, f(2) = 1$  y  $f(-1) = 0$ . Hallar el resto de la división de  $f$  por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$ .

11. Sea  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X$ .

12. i) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$ .

ii) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Z}[X]$  de grado 3 cuyas raíces complejas son exactamente  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$ .

iii) Hallar todos los  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado 4 cuyas raíces complejas son exactamente  $1, -\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$ .

13. Sean  $a, b$  y  $c$  las raíces complejas de  $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$ .

i) Hallar

(a)  $a + b + c,$

(b)  $ab + ac + bc,$

(c)  $abc,$

(d)  $a^2 + b^2 + c^2,$

(e)  $a^3 + b^3 + c^3,$

(f)  $a^4 + b^4 + c^4,$

(g)  $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2,$

(h)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$

(i)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$

ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean  $a + b, a + c$  y  $b + c$ .

14. Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que

i)  $f(1) = 3, f(0) = \frac{1}{4}, f(\frac{1}{2}) = 3$  y  $f(-1) = 1.$

ii)  $f(2) = 0, f(-3) = \frac{1}{2}, f(3) = -1$  y  $f(-2) = 1.$

15. i) Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  y sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $a \equiv b \pmod{m}$  entonces  $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$ .  
 ii) Probar que no existe  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tal que  $f(3) = 4$  y  $f(-2) = 7$ .
- \* 16. Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tal que  $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 7$  con  $a, b, c, d$  enteros distintos.  
 Probar que  $f(m) \neq 14$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .
17. Hallar todos los  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tales que  
 i)  $f$  es mónico de grado 3 y  $f(\sqrt{2}) = 5$ .                      ii)  $f$  es mónico de grado 3 y  $f(1) = -f(-1)$ .
18. Sea  $w \in \mathbb{C}$  una raíz séptima primitiva de la unidad. Probar que  $w + w^2 + w^4$  es raíz del polinomio  $X^2 + X + 2$ .
19. Hallar las raíces en  $\mathbb{C}$  y factorizar en  $\mathbb{C}[X]$  los polinomios cuadráticos  
 i)  $X^2 - 2X + 10$ .                                              iii)  $X^2 + (1 + 2i)X + 2i$ .  
 ii)  $X^2 - 3 - 4i$ .                                              iv)  $X^2 + (3 + 2i)X + 5 + i$ .
20. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio  $X^6 + X^3 - 2$ .
21. i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que  $a$  es raíz de  $f$  y de  $g$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $(f : g)$ .  
 ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X - 2$  sabiendo que tiene una raíz común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$ .
22. Hallar todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que  $X^3 f' = f^2$ .
23. Determinar la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $f$  en los casos  
 i)  $f = X^5 - 2X^3 + X$ ,  $a = 1$ .                              iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - (X - 2)(X + 7)$ ,  $a = 2$ .  
 ii)  $f = 4X^4 + 5X^2 - 7X + 2$ ,  $a = \frac{1}{2}$ .                      v)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$ ,  $a = 2$ .  
 iii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4$ ,  $a = i$ .                              vi)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$ ,  $a = 2$ .
24. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determinar los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + a$  tiene sólo raíces simples en  $\mathbb{C}$ .
25. Determinar los  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $f = X^{2n+1} - (2n + 1)X + a$  tiene al menos una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ .
26. Sea  $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$ . Determinar todos los valores de  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  admite una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene  $f$  y la multiplicidad de cada una de ellas.
27. i) Probar que para todo  $a \in \mathbb{C}$ , el polinomio  $f = X^6 - 2X^5 + (1 + a)X^4 - 2aX^3 + (1 + a)X^2 - 2X + 1$  es divisible por  $(X - 1)^2$ .  
 ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  es divisible por  $(X - 1)^3$ .
28. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que 1 sea raíz *doble* de  $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2 + 3a)X - 2a$ .
29. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n X^k \in \mathbb{C}[X]$  tiene todas sus raíces complejas simples.
30. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que  $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$  tiene todas sus raíces complejas simples.

31. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $i$  es raíz *doble* de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

32. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2f'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

33. i) Sea  $f \in \mathbb{C}[X]$ . Probar que  $a \in \mathbb{C}$  es raíz de multiplicidad  $k$  de  $f$  si y sólo si es raíz de multiplicidad  $k - 1$  de  $(f : f')$ .

ii) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$ . Probar que si  $f$  es irreducible en  $\mathbb{Q}[X]$ , entonces tiene todas sus raíces (en  $\mathbb{C}$ ) simples.

\* 34. Sea  $f$  un polinomio de grado  $a$  lo sumo  $n$  tal que  $f(i) = \frac{1}{i+1}$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Hallar  $f(n+1)$ .

### Factorización

35. Factorizar en  $\mathbb{C}[X]$  los polinomios

i)  $X^6 - 8$ .

iii)  $X^7 - (-1 + i)$ .

v)  $X^6 - (2 - 2i)^{12}$ .

ii)  $X^4 + 3$ .

iv)  $X^{11} - 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}$ .

vi)  $X^{12} + X^6 + 1$ .

36. Factorizar en  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$  los polinomios

i)  $X^3 - 1$ .

ii)  $X^4 - 1$ .

iii)  $X^6 - 1$ .

iv)  $X^8 - 1$ .

37. Factorizar en  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$  los polinomios

i)  $X^6 - 8$ .

ii)  $X^4 + 3$ .

iii)  $X^{12} + X^6 + 1$ .

38. Probar que  $(X^n - 1 : X^m - 1) = X^{(n:m)} - 1$ .

39. Hallar todas las raíces racionales de

i)  $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$ .

iii)  $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$ .

ii)  $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$ .

iv)  $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ .

40. Factorizar los siguientes polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ :

i)  $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$ .

ii)  $X^4 - 6X^2 + 1$ .

iii)  $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$  sabiendo que  $1 + 2i$  es raíz.

iv)  $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$  sabiendo que  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  es raíz.

v)  $X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$  sabiendo que  $\sqrt{2}i$  es raíz múltiple.

vi)  $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$  sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

vii)  $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$  sabiendo que una de sus raíces es una raíz sexta primitiva de la unidad.

41. Hallar todas las raíces complejas del polinomio  $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$  sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es  $-6$ .

42. i) Hallar todas las raíces complejas de  $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$  sabiendo que  $2 - \sqrt{3}$  es raíz de  $f$ .

ii) Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  mónico de grado mínimo que tenga a  $1 + 2\sqrt{5}$  y a  $3 - \sqrt{2}$  como raíces.

iii) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  un polinomio de grado 5. Probar que si  $\sqrt{2}$  y  $1 + \sqrt{3}$  son raíces de  $f$  entonces  $f$  tiene una raíz racional.

iv) Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1 + \sqrt{2}) = 3$ ,  $f(2 - \sqrt{3}) = 3$  y  $f(1 + \sqrt{5}) = 3$ . Calcular el resto de la división de  $f$  por  $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$ .

43. Factorizar el polinomio  $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$  sabiendo que la suma de tres de sus raíces es  $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

44. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = X^4 - (a + 4)X^3 + (4a + 5)X^2 - (5a + 2)X + 2a$  tenga a  $a$  como raíz *doble*. Para cada valor de  $a$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

45. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio

$$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$

Para cada valor de  $a$  hallado factorizar el polinomio en  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$ .

46. Hallar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales al menos una de las raíces de

$$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

sea una raíz sexta primitiva de la unidad.

Para cada valor de  $a \in \mathbb{Q}$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

47. (*Lema de Gauss*) Sea  $p$  un número primo y  $f \in \mathbb{Z}[X]$  un polinomio. Supongamos que todos los coeficientes de  $f$  son múltiplos de  $p$  y que  $f(X) = f_1(X)f_2(X)$  con  $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[X]$ . Probar que alguno de los factores  $f_1, f_2$  tiene todos los coeficientes múltiplos de  $p$ .

Sugerencia: Considerar  $\overline{f}, \overline{f_1}, \overline{f_2} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ .

\* 48. Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  de grado 7 tal que toma alguno de los valores 1 o  $-1$  para 7 valores enteros diferentes de  $X$ . Probar que  $f$  es irreducible en  $\mathbb{Z}[X]$ .

49. Encontrar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(X - a)(X - 10) + 1$  sea reducible en  $\mathbb{Z}[X]$ .