

Álgebra I

Práctica 6 - Números Complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$.

| | | |
|--|--|--|
| i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$ | iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$ | vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$ |
| ii) $z = 5i(1 + i)^4$ | v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{179}$ | vii) $z = \overline{1 - 3i}^{-1}$ |
| iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$ | | |

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano complejo los siguientes números:

| | | | |
|--------------|---------------------|-------------------------|---------------------------|
| i) z | v) $-z$ | ix) \bar{z} | xiii) $ 2z $ |
| ii) w | vi) $2z$ | x) $\overline{3z + 2w}$ | xiv) $ z + w $ |
| iii) $z + w$ | vii) $\frac{1}{2}w$ | xi) \bar{iz} | xv) $ z - w $ |
| iv) $z - w$ | viii) iz | xii) $ z $ | xvi) $ \overline{w - z} $ |

3. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

| | |
|--|---|
| i) $\{z \in \mathbb{C} / 3\operatorname{Re}(z) - 1 = 2\operatorname{Im}(z)\}$ | iii) $\{z \in \mathbb{C} / 2 \leq z - 1 + i \leq 3\}$ |
| ii) $\{z \in \mathbb{C} / -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \text{ y } z \leq 2\}$ | iv) $\{z \in \mathbb{C} / z - 2 = z - 1 - i \}$ |

4. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

| | | |
|------------------------------------|--|---|
| i) $z \neq 0$ y $z = \bar{z}^{-1}$ | iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ | v) $ z - \bar{z} = \operatorname{Re}(z)$ |
| ii) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ | iv) $ z ^2 = (z + \bar{z}) \cdot \operatorname{Im}(z)$ | vi) $i(z^2 + 4) = z \cdot \operatorname{Im}(z)$ |

5. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z :

| | | | |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|
| i) $z = -36$ | ii) $z = i$ | iii) $z = -3 - 4i$ | iv) $z = -15 + 8i$ |
|--------------|-------------|--------------------|--------------------|

6. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

| | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| i) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$ | ii) $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$ |
|----------------------------------|--------------------------------|

7. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

| | | |
|------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| i) $3 + \sqrt{3}i$ | iii) $(-1 - i)^{-1}$ | v) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-5}$ |
| ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$ | iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$ | vi) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$ |

8. Graficar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$

20. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz 23-ésima primitiva de la unidad. Hallar la parte real de $\sum_{k=1}^{11} w^{k^2}$.

21. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\operatorname{Re}((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)) = 0$.

22. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$.

23. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si \bar{w} lo es.

24. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

25. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz 35-ésima primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{cases} w^{15n} = w^5 \\ w^{14n} = w^{21} \end{cases}$$

26. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-ésimas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea \sim la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = wb \text{ para algún } w \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

i) Probar que \sim es una relación de equivalencia.

ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

27. Probar que no es posible hallar tres puntos del plano con coordenadas enteras que sean los vértices de un triángulo equilátero.