Práctica 1: Construcción de medidas

"A mathematician is a device for turning coffee into theorems."
Paul Erdős

Ejercicio 1. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre Ω. Probar que la clase

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \left\{ A \in \Omega : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ con } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S} \text{ disjuntos} \right\}$$

es un álgebra de subconjuntos de Ω.

Definición. Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{D}$ es un λ-*sistema* si verifica las siguientes condiciones:

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ y $A_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Ejercicio 2. Verificar que la condición (b) en la definición de λ-sistema puede ser sustituida por la condición

$$(b') \ \ A, B \in \mathcal{D} \text{ y } A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

Ejercicio 3. Probar que toda clase $\mathcal{C}$ que sea π-sistema y λ-sistema a la vez resulta una σ-álgebra.

Ejercicio 4.

a) Probar que en el Teorema de Caratheodory-Hahn la extensión resulta única si la medida μ es σ-finita sobre la semiálgebra $\mathcal{S}$ (μ es σ-finita sobre $\mathcal{S}$ si el espacio es unión numerable de conjuntos de $\mathcal{S}$ de medida finita).

b) Mostrar con un ejemplo que la extensión puede no ser única si μ no es σ-finita.
Sugerencia. Considere $\mathcal{S} = \{(a, b] : -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$ y la medida μ sobre $\mathcal{S}$ dada por

$$\mu(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = \emptyset \\ \\ +\infty & \text{si } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definición. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{M}$ una clase de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathcal{M}$ es una *clase monótona* sobre Ω si verifica las siguientes condiciones:

(a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Ejercicio 5. Sean Ω un conjunto y $\mathcal{A}$ una clase de subconjuntos de Ω.

a) Mostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, siendo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la clase monótona generada por $\mathcal{A}$.

b) **Teorema de la clase monótona**. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Ejercicio 6. Mostrar un conjunto Ω, $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$ y medidas μ y ν definidas allí con $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ finito pero tal que μ y ν no coinciden en $\sigma(S)$.