Práctica 8

Series de Fourier - Separación de variables

1. a) Verificar que

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ pero que (f_n) no converge a cero en media cuadrática.

- b) Verificar que $f_n(x) = \sqrt{2nxe^{-nx^2}}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$ pero que (f_n) no converge en media cuadrática en $[0, +\infty)$.
- c) Mostrar que la convergencia en media cuadrática no implica la convergencia puntual.
2. Encontrar los valores A_1 , A_2 y A_3 de modo que la función

$$y = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + A_2 \operatorname{sen}(\pi x) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

sea la mejor aproximación (en media cuadrática) de la función $f(x) = 1$ en $(0, 2)$.

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b \cos x - c \operatorname{sen} x)^2 dx$. Determinar el punto donde F alcanza su mínimo.
4. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ integrable y tal que se extiende a $\mathbb{R}$ con período 2π . Sean c_n ($n \in \mathbb{Z}$), a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) y b_n ($n \in \mathbb{N}$) los coeficientes de su desarrollo de Fourier exponencial y trigonométrico, respectivamente.
- a) Calcular c_n en función de a_n y b_n suponiendo que $\bar{c}_n = c_{-n}$ y comprobar que esta relación se cumple cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- b) A partir del desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ obtener el de $f(-x)$.
- c) Si $f_p(x)$ y $f_i(x)$ son, respectivamente, las partes par e impar de $f(x)$, obtener sus desarrollos en serie de Fourier a partir del de $f(x)$.
5. a) Hallar la serie trigonométrica de Fourier de $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ para:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = x$

(iii) $f(x) = x^2$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) Usando (iii), calcular las sumas de las series:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c) Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$, y extendiendo f por periodicidad a $\mathbb{R}$, probar que:

(i)
$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\text{sen}(nt)}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi^2)$$

(ii)
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

6. a) A partir del desarrollo en serie de Fourier exponencial de la función 2π -periódica que coincide con e^x en $(-\pi, \pi)$, calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

b) Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función dada en a), a partir del desarrollo en serie exponencial.

7. Si $f(x) = |\text{sen } x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, probar que $f(x)$ es la suma de su serie trigonométrica de Fourier en todo punto.

8. Sea f una función de período 2π que en $[-\pi, \pi]$ se define como $f(x) = \cos(ax)$ ($a \in \mathbb{R}$).

a) Desarrollar f en serie trigonométrica de Fourier y estudiar la convergencia puntual de la serie hacia la función.

b) Calcular la suma de la serie: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n^2 - b^2)^2}$, $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

9. Desarrollar en serie exponencial de Fourier $f(x) = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq 1$. A partir de este desarrollo, obtener la serie trigonométrica de f .

10. a) Obtener la serie exponencial de Fourier de $f(x) = e^{\alpha e^{ix}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

b) Probar que: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{2n}}{n!^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

11. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x+2) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

hallar la serie trigonométrica de Fourier asociada y probar que converge a $f(x)$ para todo x .

- Sea f integrable en $[-p, p]$ y tal que $f(x + 2p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Entonces,

- $\int_{a-p}^{a+p} f(t) dt = \int_{-p}^p f(t) dt$ para todo $a \in \mathbb{R}$
- $\int_{2p}^{2p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt$ para todo $a \in \mathbb{R}$

b) Si $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, entonces:

$$g(x + 2p) = g(x) \iff \int_{-p}^p f(t) dt = 0$$

12. Probar que si f es integrable y $2p$ -periódica:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)(p-x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{nw_0}$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $w_0 = \frac{\pi}{p}$.

Sugerencia: usar el resultado anterior e integración por partes.

13. Obtener las series de senos y cosenos de Fourier correspondientes a las siguientes funciones definidas en $(0, \pi)$:

a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = -x$ c) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

14. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$

15. Sea f $2p$ -periódica e integrable. Se define:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx - \frac{1}{2}at$$

donde $a = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$. Demostrar que F es $2p$ -periódica.

16. a) Probar que la serie $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ no es la serie de Fourier de ninguna función.
 b) Calcular la n -ésima suma parcial de esta serie.

17. Sean $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ 2π -periódica y $g(x) = 1$ en $(-\pi, \pi)$, también 2π -periódica.

- ¿Qué relación hay entre f y g ?
- Calcular las series de Fourier de f y de g .
- Calcular la serie obtenida por diferenciación término a término de la serie de Fourier de f . ¿Es la serie de Fourier de g ? ¿Converge?

18. Dadas $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$, sean:

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \qquad T(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{n \cdot \sin(2nx)}{4n^2 - 1}$$

los desarrollos de Fourier en serie de cosenos y senos, respectivamente, de f y de g .

- ¿Se puede afirmar que $f(x) = S(x)$ y que $g(x) = T(x)$?
- ¿Es lícito obtener $T(x)$ derivando término a término $S(x)$?
- ¿Es lícito obtener $S(x)$ derivando término a término $T(x)$?

Sugerencia: graficar las extensiones de f y de g a $\mathbb{R}$.

19. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

Sea $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin((2n + 1)x)$ convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$, entonces $f = g$.

20. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódicas, dadas por:

$$f(x) = x \text{ en } [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x \text{ en } [-\pi, \pi)$$

- Calcular los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de f y de g y estudiar la convergencia puntual de dichas series.
- Determinar la función $h(x)$ sabiendo que es la suma de la serie

$$\pi - 4 \sum_{n \geq 0} \frac{\sin((2n + 1)x)}{2n + 1}$$

y comprobar el resultado calculando los coeficientes de Fourier de h .

21. Desarrollar $\sin^5 t$ en serie trigonométrica de Fourier sin calcular expresamente los coeficientes.

Sugerencia: escribir el seno en términos de la exponencial y usar el binomio de Newton.

22. Desarrollar en serie de Fourier las funciones:

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \operatorname{sen} t) \quad g(t) = e^{r \cos t} \operatorname{sen}(r \operatorname{sen} t) \quad h(t) = \frac{1}{1 - re^{it}} \quad 0 < r < 1.$$

Separación de variables

23. Hallar los autovalores y las autofunciones de los siguientes problemas:

a) $u'' + \lambda u = 0$, para $0 < x < \pi$ y con las siguientes condiciones de contorno:

i) $u(0) = u(\pi) = 0$

ii) $u'(0) = u'(\pi) = 0$

iii) $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + \lambda u = 0$, $-\pi < x < \pi$, $u(-\pi) = u(\pi)$ y $u'(-\pi) = u'(\pi)$

24. Usando separación de variables resolver:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(0, y) = 8e^{-3y}$.

b) $\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < 1$, $t > 0$.

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad |u(x, t)| < M, \quad u(x, 0) = 5 \operatorname{sen}(4\pi x) - 3 \operatorname{sen}(8\pi x) + 2 \operatorname{sen}(10\pi x).$$

c) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $u(2, t) = 0$,

$$u(x, 0) = 8 \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi x}{4}\right).$$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$.

$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

donde κ es una constante positiva.