

## Práctica 5

### Integrales complejas y fórmulas de Cauchy

---

1. Calcular

a)  $\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$                       b)  $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$  ( $\operatorname{Re}(z) > 0$ )    c)  $\int_1^2 \log(it) dt$

2. a) Sean  $\gamma, \sigma$  las poligonales de vértices  $\{1, i\}$  y  $\{1, 1+i, i\}$  respectivamente. Hallar una parametrización de  $\gamma$  y de  $\sigma$  y calcular  $\int_{\gamma} f$  y  $\int_{\sigma} f$ , donde  $f(z) = |z|^2$ .

b) Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

3. Calcular:  $\int_{\gamma} 3z dz$  y  $\int_{\gamma} 3|z| dz$ , para

a)  $\gamma$ : segmento que une  $-1$  con  $1$ .

b)  $\gamma$ :  $|z| = 1$  de  $-1$  a  $1$ , recorrido en el sentido horario.

c)  $\gamma$ :  $|z| = 1$  de  $-1$  a  $1$ , recorrido en el sentido antihorario.

d)  $\gamma$ : poligonal de vértices  $-1, i, 1$ .

4. Calcular

a)  $\int_C e^z dz$ , si  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , recorrida una vez en sentido horario.

b)  $\int_0^1 x dz$ , uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices:  $0, i, 1$ .

c)  $\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , recorriendo la curva una vez en sentido horario.

5. Sea  $\gamma$  el polígono cerrado de vértices:  $1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ .

Hallar  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ .

6. Sean  $D \subset \mathbb{C}$  abierto,  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  diferenciable a trozos y  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Se define:

$$\int_{\gamma} f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| dt$$

- a) ¿Qué se obtiene cuando  $f \equiv 1$ ?
- b) Calcular  $\int_{\gamma} |dz|$  para  $\gamma : |z - a| = r$ .
- c) Probar que  $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|$  y deducir que si  $|f(z)| \leq M$  y  $\ell = \text{long}(\gamma)$ , entonces  $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq M\ell$ .

7. Calcular

a)  $\int_{\gamma} x dz$ ,  $\gamma$  : segmento de 0 a  $1 + i$

b)  $\int_{|z|=1} |z - 1| |dz|$

c)  $\int_{C_i} z^n dz$  ( $a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}$ )

$$C_1 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq \pi; \quad C_2 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

d)  $\int_{C_i} \frac{dz}{z - 2}$   $C_1 : |z - 2| = 4; \quad C_2 : |z - 1| = 5$

e)  $\int_{\gamma} (x^2 + iy^2) |dz|$   $\gamma : |z| = 2$

f)  $\int_{|z-1|=1} \bar{z}^2 dz$

8. Hallar  $\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}} dz$ , donde:

a)  $\gamma : |z| = 1, \text{Im}(z) \geq 0$ , de 1 a  $-1$ .

b)  $\gamma : |z| = 1, \text{Im}(z) \leq 0$ , de 1 a  $-1$ .

9. Sea  $\gamma(t) = 1 + e^{it}$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Hallar

a)  $\int_{\gamma} (z^2 - 1)^{-1} dz$ .

b) Idem para  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ .

10. Sea  $f$  holomorfa en un abierto conexo  $\Omega$  tal que  $|f(z) - 1| < 1$  en  $\Omega$ . Mostrar que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \text{ para cualquier curva cerrada } \gamma \text{ contenida en } \Omega.$$

**Nota:**  $f'$  es continua.

11. Sean  $f : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  la rama principal del logaritmo y  $g : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  la rama del logaritmo que verifica  $g(1) = 2\pi i$ .

Comparar  $\int_{\gamma} f(z) dz$  y  $\int_{\gamma} g(z) dz$ , siendo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$  una curva que une 1 con  $i$ .

12. Determinar el dominio de holomorfía de la función  $f$  y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que  $\int_C f(z) dz = 0$  cuando  $C : |z| = 1$ , siendo:

$$\text{a) } f(z) = ze^{-z} \qquad \text{b) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

13. Calcular

$$\text{a) } \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{b) } \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{c) } \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d) } \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \frac{1}{2})^n}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{e) } \int_{\gamma} \frac{\log z}{z^n} dz, \quad \gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad n \geq 0.$$

$$\text{f) } \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz, \quad \gamma(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad r \in \mathbb{R}_{>0} - \{2\}.$$

#### 14. Desigualdades de Cauchy

- a) Sea  $f$  holomorfa en  $B(a, R)$  y tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in B(a, R)$ . Probar que en tal caso:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

- b) Mostrar que las derivadas sucesivas de una función holomorfa en un punto  $z$  no pueden satisfacer:

$$|f^{(n)}(z)| > n! \cdot n^n$$

15. Sea  $f$  entera y tal que  $|f(z)| \leq A + B|z|^k$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$ . Probar que  $f$  es un polinomio.

Deducir que si  $f$  es una función entera tal que para algún  $k \geq 0$ ,  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = 0$ , entonces  $f$  es un polinomio de grado menor que  $k$  (si  $k > 0$ ) o  $f \equiv 0$  (si  $k = 0$ ).

Deducir además que si  $f$  es entera y acotada entonces  $f$  es constante.

16. Hallar todas las  $f$  holomorfas en  $|z| \leq 1$  tales que  $|f(z)| \leq \sqrt{5}$  cuando  $|z| = 1$  y  $f(\frac{1}{3}) = 2 + i$ .
17. ¿Existe  $f$  holomorfa en  $|z| < 1$  tal que  $f(\frac{1}{2^n}) = \frac{(-1)^n}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ?
18. Encontrar los desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto  $a$ , para:
- a)  $\frac{e^z - 1}{z}, a = 0$  b)  $ze^z, a = -1$   
c)  $(z + 1)^{-1}, a = 1$  d)  $\frac{1 - z}{(z + 1)^3}, a = 0$
19. Desarrollar la función  $f(z) = z^{-1}$  en serie de potencias de  $z + 1 - i$ . ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie hallada?
20. Probar que si la serie  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  es convergente en  $|z - z_0| < r$ , entonces la serie  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$  es convergente en este disco y su suma es una primitiva de  $f$ . ¿Prueba esto que toda función holomorfa en un abierto  $\Omega$  admite primitiva en todo  $\Omega$ ?
21. a) Calcular, sin efectuar el desarrollo, el radio de convergencia de las series de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados
- (i)  $\frac{1}{\text{sen}(1 + iz)}$  en  $z = 0$  (ii)  $\frac{1}{\text{sen } z}$  en  $z = \frac{3}{2} - i$
- b) Sean  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. ¿Se puede encontrar siempre una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, z_0 \in \Omega$ , tal que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  en  $\Omega$ ?
22. a) Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  tal que restringida a  $\mathbb{R}$  tiene radio de convergencia  $\infty$ . Probar que  $f$  es entera.
- b) Dar una interpretación del hecho que la función real  $\frac{1}{1 + x^2}$  es indefinidamente derivable en  $\mathbb{R}$  pero no es desarrollable en serie de potencias de radio  $\infty$ .