

Práctica 4

Series de funciones y de potencias

1. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

a) $\frac{e^x}{x^n}$ en $(2, 5]$ **b)** $\frac{e^x}{x^n}$ en $(1, +\infty)$ **c)** z^n en $|z| < 1$
d) $\frac{n}{n+1}z$ en $\mathbb{C}$ **e)** $\frac{n+1}{n^2+3}\sin(2nx-\pi)$ en $\mathbb{R}$

2. Mostrar que $\frac{1}{1+nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0, 1)$. Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$.

3. Sea $(z_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números complejos. Probar

- a)** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (absolutamente) si y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ convergen (absolutamente).
b) si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

4. **a)** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n$? Demostrarlo.
b) Idem para $|\alpha| > 1$. ¿Qué se puede decir en el caso $|\alpha| = 1$?
c) Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
 - converge si $|z| < 1$
 - diverge si $|z| > 1$.

5. **a)** Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ para $|z| < 1$.

- b)** Sea $z = re^{i\theta}$ con $0 < r < 1$. Usar **a)** para verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

6. Estudiar la convergencia de las series numéricas cuyo término general es:

a) $\frac{2i}{3^n}$	b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$	c) $\frac{2^n}{5^n - n}$
d) $\frac{1}{n!}$	e) $\frac{n}{n^n}$	f) $\frac{n}{n^2 - n}$
g) $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$	h) $(-1)^n \frac{\log n}{n}$	i) $\frac{2^n}{n^n}$
j) i^n	k) $\frac{i^n}{n}$	l) $\frac{e^{in}}{n^2}$

• **Producto de Cauchy**

Dadas las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, se llama **producto de Cauchy** de ambas a la serie de término general $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Si ambas series convergen, siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, y al menos una de ellas lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB .

7. Sean $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Verificar que $\sum a_n = \sum b_n$ convergen (condicionalmente) y que el producto Cauchy de ambas series diverge.

• **Criterio de Weierstrass**

Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en X .

• **Criterio de Dirichlet**

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y existe $M > 0$ tal que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

8. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias, y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n} & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \quad (a \in \mathbb{C}) \\
\text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C}) & \text{e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n & \text{f)}^\dagger \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)} \\
\text{g)} \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} & \text{h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n} & \text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \\
\text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} & \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}} & \text{l)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}
\end{array}$$

9. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ es convergente sobre los puntos del borde de su disco de convergencia, pero que esto no es verdadero para la serie de las derivadas.

10. Observar que los conceptos de convergencia uniforme y absoluta son independientes, probando:

- a) La serie $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge absoluta pero no uniformemente en $|z| < 1$.
- b) La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge uniformemente pero no absolutamente en $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < 2\pi$.
- c) La serie $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $|z| \leq 1$.

11. a) Determinar el conjunto de valores z para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

b) Idem para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

12. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de las series:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|} & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|} \\
\text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n &
\end{array}$$

[†] Sobre el borde estudiar únicamente para $z = 1, i, -i$

13. **Exponencial:** $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

- a) Probar que es entera y calcular su derivada.
- b) Probar que $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.
- c) Calcular: $|e^z|$, $\text{Arg } e^z$, $\text{Re}(e^z)$, $\text{Im}(e^z)$, $\overline{e^z}$
- d) Probar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.
- e) Analizar la existencia de $\lim_{|z| \rightarrow \infty} e^z$.
- f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.
- g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = \pm 1$.
- h) Mostrar que $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

14. **Funciones trigonométricas**

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

- a) Probar que $\sin z$, $\cos z$ son enteras y calcular sus derivadas.
- b) Probar que
 - i) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
 - ii) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
 - iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
 - iv) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
 - v) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
 $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$
- c) Verificar que ambas tienen período 2π .
- d) i) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\sin z = 0$.
 ii) Idem para $\cos z$.

15. **Funciones hiperbólicas**

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

- a) Verificar
 - i) $\sin(iz) = i \sinh z$, $\cos(iz) = \cosh z$
 - ii) $\sinh(iz) = i \sin z$, $\cosh(iz) = \cos(z)$
 - iii) $\sinh |\text{Im } z| \leq |\sin z| \leq \cosh(\text{Im } z)$, $\sinh |\text{Im } z| \leq |\cos z| \leq \cosh(\text{Im } z)$
 Deducir que $\sin z$, $\cos z$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\text{iv)} \quad \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z) + i \sinh(\operatorname{Im} z) \cos(\operatorname{Re} z) \\ \cos z &= \cos(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z) - i \sinh(\operatorname{Im} z) \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z)\end{aligned}$$

b) Probar

$$\text{i)} \quad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{Re} z) + \sinh^2(\operatorname{Im} z)$$

$$\text{ii)} \quad |\cos z|^2 = \cos^2(\operatorname{Re} z) + \sinh^2(\operatorname{Im} z)$$

c) Caracterizar los conjuntos $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{sen} z = 8\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : \cos z = i\}$.

d) Estudiar la periodicidad de $\sinh z$ y $\cosh z$.

e) Hallar los ceros de ambas funciones.

f) Hallar el desarrollo en serie de potencias de ambas funciones.

16. Logaritmo

a) Dado $z \in \mathbb{C}$, demostrar que $e^z = 1$ si y solo si existe un entero k tal que $z = 2k\pi i$. Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

b) Sea $A \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un abierto que no contiene al origen. Una función continua $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in A$ se llama una rama del logaritmo de z en A . Probar que toda rama del logaritmo f en A es holomorfa en A y que $f'(z) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in A$. Sugerencia: considerar el cociente incremental.

c) Sea $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ y consideremos el argumento principal $\operatorname{Arg} : A \rightarrow (-\pi, \pi)$. Luego, para cada $z \in A$, $z = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)}$.

i) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln |z| + \operatorname{Arg}(z)$. Probar que f es una rama del logaritmo.

ii) Escribir todas las ramas del logaritmo en función de la dada en i) usando que en un abierto conexo la diferencia de dos ramas del logaritmo es una constante de la forma $2k\pi i$.

iii) ¿Es cierto que $f(e^z) = z$ para todo $z \in A$? ¿Si $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ es otra rama del logaritmo de z en A , es cierto que $g(e^z) = z$ para todo $z \in A$?

iii) Dado un número real θ_0 , si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0}/r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$, podemos elegir para todo z en B el único argumento de z que cae en el intervalo $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ y lo notamos $\arg_B(z)$. ¿Es cierto que la función $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \ln |z| + i\arg_B(z)$ es una rama de logaritmo de z en B ?

d) En este ejercicio $\ln$ denota cualquier logaritmo de un complejo no nulo. Calcular todos los valores posibles de: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$.

17. Sea $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abierto, y sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo. Fijamos $b \in \mathbb{C}$, y consideramos la función $g_b : G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g_b(z) = e^{bf(z)}$.

a) Probar que si $b \in \mathbb{N}$, entonces $g_b(z)$ coincide con la definición usual de z^b como el producto de z un número b de veces; si $b = -1$ entonces $g_{-1}(z) = \frac{1}{z}$ y en general, si $b \in \mathbb{Z}_{<0}$, entonces z^b coincide con el inverso del producto de z un número $-b$ de veces. ¿Cuánto vale $g_0(z)$?

- b) Probar que para todo n natural y para toda determinación de una rama del logaritmo, la función $z^{1/n}$ define una raíz n -ésima holomorfa de z en G , es decir que $(z^{1/n})^n = z$ para todo $z \in G$.
- c) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores posibles considerando las restantes ramas. Idem para $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π .
- d) Calcular la derivada $(z^a)'$.
- e) ¿Es cierto que $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$ para todo par de complejos a, b ?
- f) Sea $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abierto, y sean $g_a, g_b : G \rightarrow \mathbb{C}$ ramas de z^a y z^b , respectivamente. ¿Es cierto que
- i) $g_a \cdot g_b$ es una rama de z^{a+b} ?
 - ii) g_a/g_b es una rama de z^{a-b} ?
 - iii) si $g_a(G), g_b(G) \subset G$, entonces $g_a \circ g_b$ y $g_b \circ g_a$ son ramas de z^{ab} ?
- g) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 4\}$. Calcular una rama de $(z - 1)^{\frac{1}{3}}$ para $z \in G$
18. Sea f la rama principal de $\ln(1 + z)$, y sea $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.
- a) Calcular el radio de convergencia de g .
 - b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del círculo de convergencia de g .
 - c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para $|z| < 1$.