Práctica 2
Nociones topológicas en análisis complejo

---

1. **a)** Sea $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, probar que

$$z_n \to z \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z)$$

   b) Probar que la sucesión $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ es de Cauchy si y sólo si lo son las sucesiones reales $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\geq 1}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\geq 1}$.
   Deducir que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo.

   c) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$. ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca?

2. Escribir los primeros términos y calcular los límites de las siguientes sucesiones:

   a) ni^n **b)** $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ **c)** $\left(\frac{(-1)^n+i}{2}\right)^n$

   d) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ **e)** $\frac{n+1}{n} + i\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ **f)** $\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$

   g) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **h)** $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ **i)** z^{-n}

3. Probar

   a) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{L}$

   b) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$ y $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$

4. Calcular

   a) $\lim_{z\to -2i} \frac{z^2+2(1+i)z+4i}{z+2i}$ **b)** $\lim_{z\to i} \frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$

   c) $\lim_{z\to -i} z\cdot\overline{z}$ **d)** $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{z}$

   e) $\lim_{z\to i} f(z)$ con $f(z) = \begin{cases} z^2+2z & ,z\neq i \\ 3+2i & ,z=i \end{cases}$ **f)** $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3-3iz+2+i}{z^4+iz^2-(3+4i)z+6}$

5. Probar la continuidad de las siguientes funciones en el dominio indicado:

a) z, $\overline{z}$, $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ en $\mathbb{C}$.

b) $\dfrac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

6. Hallar los puntos de discontinuidad de:

   a) $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + 1}$

   b) $f(z) = \dfrac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + 1}$

   $(z = x + iy)$

7. Sea $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \to (-\pi, \pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|\ e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

   Nota: dado $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de** z y se lo nota: $\varphi(z) = \text{Arg}(z)$.

8. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z = 0$ de modo tal que resulten continuas en $\mathbb{C}$?

   a) $\dfrac{\text{Re}(z)}{|z|^2}$

   b) $\dfrac{\text{Re}(z)}{|z|}$

   c) $\dfrac{(\text{Re}(z))^2}{|z|}$

   d) $\dfrac{\text{Re}(z^2)}{|z|^2}$