Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2020

Espacios de Sobolev

Ejercicio 1. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| \leq k$. Demostrar las siguientes propiedades para $u, v \in W^{k,p}(U)$:

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$.
2. $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\beta| \leq k - |\alpha|$.
3. $au + bv \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(au + bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $u \in W^{k,p}(V)$ para todo $V \subset U$ abierto.
5. Si $f \in C_c^\infty(U)$, entonces $fu \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(fu) = \displaystyle\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta}u$.

Ejercicio 2. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Probar que en cada clase de $W^{k,p}(U)$ existe a lo sumo una función continua.

Ejercicio 3. Sean $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $1 \leq p < \infty$. Demostrar los siguientes resultados:

1. Si $u \in W^{1,p}(I)$, entonces $u \in AC(I)$.
2. Si $u \in W^{1,p}(I)$ y $p > 1$, entonces:

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'(t)|^p dt\right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x, y \in I.$$

Ejercicio 4. Probar que si $u \in H^1(\mathbb{R})$, entonces $\frac{1}{h}(u(\,\cdot\, + h) - u) \to u'$ en $L^2(\mathbb{R})$ si $h \to 0$.

Sugerencia 1: Escribir $\frac{1}{h}(u(\,\cdot\, + h) - u)$ como $u' * \varphi_h$, para alguna función φ_h adecuada.

Sugerencia 2: Probar primero $\|u(\,\cdot\, + h) - u\|_2^2 \leq h\|u'\|_2^2$ (aquí puede ser útil la desigualdad de Jensen) y luego usarlo para probar la convergencia buscada. Puede ser de utilidad considerar $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergente a u en $H^1(\mathbb{R})$.

Ejercicio 5. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Probar los siguientes resultados:

1. La inyección canónica es continua de $H^1(I)$ en $L^\infty(I)$, i.e. $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$. Mostrar que este mismo resultado es falso si se reemplaza I por un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$.
2. Todo conjunto acotado en $H^1(I)$ es precompacto en $C(\bar{I})$, y por lo tanto en $L^2(I)$.
   Sugerencia: Usar el teorema de Arzelà-Ascoli.

Ejercicio 6. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Probar que si $u \in H_0^1(I)$ entonces $u \in L^\infty(I)$ y existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que $\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_2$. Concluir que $\|u'\|_2$ es una norma equivalente a $\|u\|_{1,2}$ en $H_0^1(I)$.

Ejercicio 7. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Probar que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $y \mapsto (1+|y|^k)\hat{u}(y)$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, donde $\hat{u}$ es la transformada de Fourier de u.

Ejercicio 8. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. Para $u \in W^{k,p}(U)$ y $\varepsilon > 0$ definimos $u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ en $U_\varepsilon = \{x \in U \,:\, \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$, donde $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es el núcleo regularizante estándar (ver Práctica 0). Demostrar que $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ y que $u^\varepsilon \to u$ en $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$ si $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 9. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y con frontera de clase C^1. Probar que si $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ entonces existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que:

$$\int_U |\nabla u|^2 \, dx \leq C \left(\int_U |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U |\Delta u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que $\|\Delta u\|_2$ es una norma equivalente a la usual en $H_0^2(U)$.

Ejercicio 10. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$ es tal que $\nabla u = 0$, entonces u es constante en cada componente conexa de U.

Ejercicio 11. Mostrar que las conclusiones del teorema de compacidad de Rellich–Kondrachov se mantienen si en lugar de asumir que $U \subset \mathbb{R}^n$ es acotado se asume que $|U| < \infty$.

Ejercicio 12 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado frontera de clase C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|u - \bar{u}\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2 \qquad \forall\, u \in H^1(U),$$

donde $\bar{u} = \fint_U u \, dx$.

Ejercicio 13. Sean $\alpha > 0$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado con frontera de clase C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2 \qquad \forall\, u \in H^1(U) \,:\, |\{x \in U \colon u(x) = 0\}| \geq \alpha.$$

Ejercicio 14 (Regla de la cadena)**.** Sean $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1. Demostrar que si $F \in C^1(\mathbb{R})$ tiene derivada acotada y $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $F \circ u \in W^{1,p}(U)$ y $\partial_i(F \circ u) = (F' \circ u)\partial_i u$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 15. Sean $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Demostrar las siguientes propiedades:

1. Si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(U)$ y para $i = 1, \ldots, n$ se tiene:
$$\partial_i |u| = \begin{cases} \partial_i u & \text{en} \quad U^+ = \{x \in U : u(x) > 0\}, \\ -\partial_i u & \text{en} \quad U^- = \{x \in U : u(x) < 0\}, \\ 0 & \text{en} \quad U^0 = \{x \in U : u(x) = 0\}. \end{cases}$$
2. Si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ y para $i = 1, \ldots, n$ se tiene:
$$\partial_i u^+ = \begin{cases} \partial_i u & \text{en} \quad U^+, \\ 0 & \text{en} \quad U^0 \cup U^-, \end{cases} \qquad \partial_i u^- = \begin{cases} -\partial_i u & \text{en} \quad U^+, \\ 0 & \text{en} \quad U^0 \cup U^+. \end{cases}$$
Sugerencia: Usar que $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para
$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$
3. Si $u \in W_0^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W_0^{1,p}(U)$.
4. Si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $\nabla u = 0$ en U_0.