Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2020

Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Resolver los siguientes problemas.

1. $\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u|_{x_1=0} = x_2,$
2. $x \cdot \nabla u(x) = |x|^2 \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u|_{x_1=1} = 3x_n.$

Ejercicio 2. Considerar la ecuación:

$$xu_x(x,y) - yu_y(x,y) = 0 \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Verificar que la solución general es de la forma $u(x,y) = f(xy)$, con $f \in C^1(\mathbb{R})$.
2. Encontrar la solución que satisface $u = g$ sobre la recta $x = y$.
3. ¿Qué pasa con el problema del ítem anterior si el dato se da sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 3.

1. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
que satisfaga $u = 1$ sobre la recta $y = x$.
2. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y)^2 \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = z$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.
3. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x(x,y) + 2xyu_y(x,y) = (x+y)u(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
que satisface $u(0,y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Resolver los siguientes problemas, siendo L el operador diferencial definido por:

$$Lu = x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u.$$

1. $Lu = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \qquad u(x,y,0) = xy \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
2. $Lu = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \qquad u(x,y,0) = f(x,y) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

En el segundo problema, imponer condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

Ejercicio 5.

1. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema:
$$u_t + vu_x = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = 0 \quad x \in \mathbb{R},$$
donde $v \in \mathbb{R}$. Hallar una fórmula explícita para la solución para $f(x,t) = e^{-t}\sin x$.
2. Demostrar que si $v \geq 0$ y $u \in C^1((0,\infty) \times (0,\infty))$ es solución de:
$$u_t + vu_x = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty)\times(0,\infty), \qquad u(0,t) = h(t) \quad t > 0, \qquad u(x,0) = g(x) \quad x > 0,$$
entonces se tiene la siguiente estimación de estabilidad:
$$\int_0^R u^2(x,t)\,dx \leq \int_0^R g^2(x)\,dx + v\int_0^t h^2(s)\,ds \qquad \forall\, t > 0,\ R > 0.$$
Usar esta estimación para deducir la unicidad de solución.

Ejercicio 6. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para el problema:

$$u_t + v \cdot \nabla u + \gamma u = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \qquad\qquad u(x,0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\gamma > 0$ y $v \in \mathbb{R}^n$ son constantes.

Ejercicio 7. Considerar el problema:

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Las curvas características $(x(t), t)$ para este problema se definen mediante la ecuación

$$x'(t) = u(x(t), t) \qquad\qquad t > 0.$$

1. Probar que si u es solución entonces u es constante sobre las curvas características.
2. Obtener explícitamente las curvas características y verificar que se trata de rectas determinadas por los datos iniciales.
3. Demostrar que si $x_1 < x_2$ y $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$, entonces las curvas características que pasan por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ se intersecan en un punto $P = (\bar{x}, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ y deducir que una solución no puede ser continua en P.

Ejercicio 8. Repetir el ejercicio 7 para la ecuación

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty),$$

donde $f'' > 0$ y $f'(u_0) > 0$. Las características se definen ahora mediante la ecuación

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)) \qquad\qquad t > 0.$$

Concluir que, en general, es imposible hallar una solución continua, independientemente de la suavidad de f.

Ejercicio 9.

1. Probar que si u es solución de

   $$u_t + (f(u))_x = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{1}$$

   entonces verifica

   $$\int_0^T \int_{-a}^{a} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x)\phi(x,0)\, dx = 0, \tag{2}$$

   para todo $a, T > 0$ y toda función $\phi \in C^1([-a,a] \times [0,T])$ tal que:

   $$\phi(\pm a, \cdot\,) = 0, \qquad\qquad \phi(\,\cdot\,, T) = 0.$$

   Una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ tal que $f(u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ y vale (2), se denomina una solución débil de (1).
2. Mostrar que si $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ es solución débil de (1) entonces es solución de (1).

Ejercicio 10. Considerar el problema:

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0, \\ 1 & x < 0. \end{cases}$$

Mostrar que para todo $\alpha \geq 1$, la función u_α dada por:

$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -\beta t, \\ -\alpha & \text{si} \quad -\beta t \leq x < 0, \\ \alpha & \text{si} \quad 0 \leq x < \beta t, \\ -1 & \text{si} \quad \beta t \leq x. \end{cases}$$

es una solución débil (en el sentido del ejercicio anterior), donde $\beta = \dfrac{\alpha - 1}{2}$.