PRIMER PARCIAL - 19/10/2020

Para aprobar el examen se deben resolver correctamente al menos dos ejercicios. Recuerde justificar todas las respuestas.

1. Considerar el problema:

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad A \times (0,\infty), \tag{1}$$
$$u = 0 \quad \text{en} \quad \partial A \times (0,\infty), \tag{2}$$
$$u = f \quad \text{en} \quad A \times \{0\}, \tag{3}$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x| < 2\}$ y f es una función radial definida por $f(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$.

(a) Usar el método de separación de variables para determinar una solución radial.

Sugerencia: Ver qué problema resuelve $v(r,t) = rw(r,t)$ donde $u(x,t) = w(|x|,t)$.

Indicar sólo los pasos fundamentales del método, no detallar todos los cálculos.

(b) Demostrar que si $\varphi \in C^1([1,2])$ entonces la solución formal hallada en (a) pertenece a $C^{2,1}(\bar{A} \times (0,\infty) \cap C(\bar{A} \times [0,\infty))$ y resuelve el problema.

Indicar los pasos fundamentales de la prueba, no detallar todos los cálculos.

2. Sean B la bola unitaria centrada en el origen de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$, $v \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ tales que:

$$\begin{cases} \Delta u = u^2 & \text{en} \quad B, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial B, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v = \exp(u) - 1 & \text{en} \quad B, \\ \partial_{\mathbf{n}} v = g & \text{en} \quad \partial B. \end{cases}$$

Demostrar que si $g \in C(\partial B)$ y $\max_{\partial B} g > 0$, entonces g cambia de signo en ∂B.

3. Considerar la ecuación $\mathcal{L}u + u = f$ en $\mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\partial_{x_i x_j} u$ con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ semidefinida positiva. Demostrar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una única solución u en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4. Sean $T > 0$ y $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,T]) \cap C^1([0,1] \times [0,T])$ una función que satisface:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \qquad x \in (0,1),\ t \in (0,T],$$
$$u_x(1,t) \le 0 \le u_x(0,t) \qquad t \in (0,T],$$
$$u(x,0) \le 0 \qquad x \in [0,1].$$

Demostrar que $u \le 0$ en $(0,1) \times (0,T]$.

Sugerencia: Considerar la función $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon(x(1-x) - 2t)$, $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$, para $\varepsilon > 0$ dado.