

PRIMER PARCIAL - 19/10/2020
RESOLUCIÓN

1. Considerar el problema:

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{en } A \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial A \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$u = f \quad \text{en } A \times \{0\}, \quad (3)$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x| < 2\}$ y f es una función radial definida por $f(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$.

(a) Usar el método de separación de variables para determinar una solución radial.

Sugerencia: Ver qué problema resuelve $v(r, t) = rw(r, t)$ donde $u(x, t) = w(|x|, t)$.

Indicar sólo los pasos fundamentales del método, no detallar todos los cálculos.

(b) Demostrar que si $\varphi \in C^1([1, 2])$ entonces la solución formal hallada en (a) pertenece a $C^{2,1}(\bar{A} \times (0, \infty) \cap C(\bar{A} \times [0, \infty))$ y resuelve el problema.

Indicar los pasos fundamentales de la prueba, no detallar todos los cálculos.

Resolución.

(a) Una función radial u , dada por $u(x, t) = w(|x|, t)$ para $w : [1, 2] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, es solución si y sólo si w resuelve:

$$w_t(r, t) - w_{rr}(r, t) - \frac{2}{r}w_r(r, t) = 0 \quad 1 < r < 2, t > 0 \quad (4)$$

$$w(1, t) = w(2, t) = 0 \quad t > 0, \quad (5)$$

$$w(r, 0) = \varphi(r) \quad 1 < r < 2. \quad (6)$$

Haciendo el cambio de variables $v(r, t) = rw(r, t)$ este último problema se transforma en:

$$v_t(r, t) - v_{rr}(r, t) = 0 \quad 1 < r < 2, t > 0 \quad (7)$$

$$v(1, t) = v(2, t) = 0 \quad t > 0, \quad (8)$$

$$v(r, 0) = r\varphi(r) \quad 1 < r < 2. \quad (9)$$

A continuación vamos a resolver el problema para v mediante el método de separación de variables.

Suponemos que existe una solución v de la forma:

$$v(r, t) = R(r)T(t) \quad 1 < r < 2, t > 0.$$

Usando que v satisface (7), obtenemos:

$$R(r)T'(t) - R''(r)T(t) = 0 \quad \forall 1 < r < 2, t > 0,$$

de donde sigue que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} = \lambda \quad \forall 1 < r < 2, t > 0. \quad (10)$$

Usando ahora que $v(1, t) = v(2, t) = 0$ para todo $t > 0$, se tiene:

$$R(1)T(t) = R(2)T(t) = 0 \quad \forall t > 0,$$

de donde se deduce que $R(1) = R(2) = 0$. Combinando esto con (10), obtenemos que R y T son solución de:

$$R''(r) - \lambda R(r) = 0 \quad 1 < r < 2, \quad R(1) = R(2) = 0, \quad (11)$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0 \quad t > 0. \quad (12)$$

El problema (11) admite soluciones no nulas sólo si:

$$\lambda = -k^2\pi^2 \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

en cuyo caso la solución general es:

$$R(r) = B \sin(k\pi r) \quad 1 < r < 2, \quad B \in \mathbb{R}.$$

Para λ dado por (13), la solución general de (12) es:

$$T(t) = C \exp(-k^2\pi^2 t) \quad C \in \mathbb{R}.$$

Entonces definimos:

$$v(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp(-k^2\pi^2 t) \sin(k\pi r) \quad 1 < r < 2, \quad t > 0, \quad B_k \in \mathbb{R},$$

y observamos que, formalmente, v satisface la ecuación $v_t - v_{rr} = 0$ en $(1, 2) \times (0, \infty)$ y las condiciones $v(1, t) = v(2, t) = 0$ para todo $t > 0$. A continuación determinaremos los coeficientes B_k para que v verifique $v(r, 0) = r\varphi(r)$ para todo $1 < r < 2$. Igualando formalmente el lado derecho a su desarrollo en serie de Fourier de senos, deducimos que:

$$B_k = b_k \quad k \in \mathbb{N}.$$

donde b_k es el k -ésimo coeficiente de Fourier en el desarrollo en serie de senos de $r\varphi(r)$:

$$b_k = 2 \int_1^2 \frac{\varphi(r)}{r} \sin(k\pi r) dr \quad k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Por lo tanto, obtuvimos la siguiente solución formal:

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-k^2\pi^2 t) \sin(k\pi|x|) \quad x \in \bar{A}, \quad t \geq 0,$$

donde b_k está dado por (14).

(b) Para $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$v_k(r, t) = b_k \exp(-k^2\pi^2 t) \sin(k\pi r) \quad 1 < r < 2, \quad t > 0.$$

Para $\tau > 0$ y $1 \leq r \leq 2$, $t > \tau$, se tiene:

$$\begin{aligned} |v_k(r, t)| &\leq C|b_k| \exp(-k^2\pi^2\tau), \\ |\partial_r v_k(r, t)| &\leq Ck|b_k| \exp(-k^2\pi^2\tau), \\ |\partial_{rr} v_k(r, t)|, |\partial_t v_k(r, t)| &\leq Ck^2|b_k| \exp(-k^2\pi^2\tau), \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es constante. Notando ahora que $|b_k| \leq C\|\psi\|_1$, donde $\psi(r) = r\varphi(r)$, y que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-k^2 a) < \infty \quad \forall a > 0,$$

obtenemos que $v \in C^{2,1}([1, 2] \times [\tau, \infty))$ y que sus derivadas se obtienen derivando término a término. De la arbitrariedad de $\tau > 0$ sigue que lo mismo vale reemplazando $[1, 2] \times [\tau, \infty)$ por $[1, 2] \times (0, \infty)$. En particular, v satisface $v_t - v_{rr} = 0$ en $(1, 2) \times (0, \infty)$ y las condiciones $v(1, t) = v(2, t) = 0$ para todo $t > 0$.

Ahora observamos que para todo $1 \leq r \leq 2$ se tiene:

$$|v_k(r, 0)| \leq C|b_k|.$$

Usando que $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$ ya que $\psi \in AC[1, 2]$, $\psi' \in L^2(1, 2)$ y $\psi(1) = \psi(2) = 0$, vemos que v es continua en $\bar{A} \times [0, \infty)$. En particular, v satisface:

$$v(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi r) = \psi(r) \quad \forall 1 \leq r \leq 2.$$

Notar que el desarrollo en serie de Fourier de senos de ψ converge puntualmente a ψ ya que $\psi \in C^1([1, 2])$.

En consecuencia, $u \in C^{2,1}(\bar{A} \times (0, \infty)) \cap C(\bar{A} \times [0, \infty))$ y resuelve el problema.

2. Sean B la bola unitaria centrada en el origen de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$, $v \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ tales que:

$$\begin{cases} \Delta u = u^2 & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{en } \partial B, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = \exp(u) - 1 & \text{en } B, \\ \partial_{\mathbf{n}} v = g & \text{en } \partial B. \end{cases}$$

Demostrar que si $g \in C(\partial B)$ y $\max_{\partial B} g > 0$, entonces g cambia de signo en ∂B .

Resolución 1.

Como $u \in C^2(\bar{B}) \cap C(B)$ satisface $\Delta u \geq 0$, se tiene que u es subarmónica en B y que satisface el principio débil del máximo. Luego, $u \leq 0$ en B ya que $u = 0$ sobre ∂B .

Entonces se tiene que $\Delta v \leq 0$ en B . Como además $v \in C^2(\bar{B}) \cap C(B)$, resulta que v es superarmónica y que satisface el principio débil del mínimo. Luego, existe $x_0 \in \partial B$ tal que $\min_{\bar{B}} v = v(x_0)$.

Si existiera $y_0 \in B$ tal que $v(y_0) = v(x_0)$, resultaría v constante en $\bar{B}$ ya que u satisface el principio fuerte del mínimo por ser B un conjunto conexo. Entonces, se tendría $\partial_{\mathbf{n}} v = 0$ sobre ∂B , lo cual contradice que g tiene un máximo positivo.

Como $\Delta v \leq 0$ y $x_0 \in \partial B$ tiene la propiedad de la bola tangente interior y es tal que $v(x_0) < v$ en B , el Lema de Hopf implica que $\partial_{\mathbf{n}} v(x_0) < 0$. Luego $g(x_0) < 0$ y por lo tanto g cambia de signo en ∂B .

Resolución 2.

Como $u \in C^2(\bar{B}) \cap C(B)$ satisface $\Delta u \geq 0$, se tiene que u es subarmónica en B y que satisface el principio débil del máximo. Luego, $u \leq 0$ en B ya que $u = 0$ sobre ∂B .

Entonces se tiene que $\Delta v \leq 0$ en B . Usando la primera fórmula de Green para v y la función consante 1, se obtiene:

$$\int_{\partial B} g \, dx = \int_B \Delta v(x) \, dx \leq 0.$$

Como $\max_{\partial B} g > 0$, existen $x_0 \in \partial B$ y un entorno U de x_0 en ∂B tales que $g > 0$ en U . Si g no cambiara de signo en ∂B se tendría $g \geq 0$ en ∂B , ya que $\max_{\partial B} g > 0$. Entonces, resultaría:

$$\int_{\partial B} g \, dx = \int_{\partial B \setminus U} g \, dx + \int_U g \, dx > 0.$$

Absurdo.

3. Considerar la ecuación $\mathcal{L}u + u = f$ en $\mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \partial_{x_i x_j} u$ con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva. Demostrar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una única solución u en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Resolución.

Primero buscaremos una solución formal mediante el método de la transformada de Fourier y luego probaremos que la función hallada es la única solución en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Suponemos que existe una solución u . Aplicando la transformada de Fourier miembro a miembro de $\mathcal{L}u + u = f$, obtenemos:

$$p(y)\hat{u}(y) = \hat{f}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

donde $p(y) = 1 + 4\pi^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$. Usando que A es semidefinida positiva se tiene $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \geq 0$, por lo que $p \geq 1$ en $\mathbb{R}^n$. Luego,

$$\hat{u}(y) = \frac{\hat{f}(y)}{p(y)} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Obtenemos entonces la siguiente solución formal:

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}/p). \quad (15)$$

Veamos ahora que la función u en (15) está bien definida y que es la única solución de la ecuación $\mathcal{L}u + u = f$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para ello, veremos primero que $\hat{f}/p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y p es un polinomio positivo en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\hat{f}/p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, para $j \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^j) |D^\alpha(\hat{f}/p)(y)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^j) |D^\beta(1/p)(y)| |D^{\alpha-\beta} \hat{f}(y)|.$$

Notando ahora que $D^\beta(1/p)$ es una función racional con denominador $p^{|\beta|} \geq 1$, vemos que $|D^\beta(1/p)|$ está acotada por un polinomio. Usando ahora que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, obtenemos que:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^j) |D^\alpha(\hat{f}/p)(y)| < \infty.$$

Luego, $\hat{f}/p \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando que la transformada de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vemos que u está bien definida y pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En particular, se tiene:

$$p\hat{u} = \mathcal{F}(\mathcal{L}u + u),$$

así que u satisface $\mathcal{F}(\mathcal{L}u + u) = \hat{f}$. Notando que $\mathcal{L}u + u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vemos que podemos anti-transformar $\mathcal{F}(\mathcal{L}u + u) = \hat{f}$ y obtener que u es solución de $\mathcal{L}u + u = f$.

Supongamos finalmente que existe $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{L}v + v = f$. Como $\mathcal{L}$ es un operador lineal, se tiene que $w = u - v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es solución de $\mathcal{L}w + w = 0$. Razonando como al comienzo, se

ve que $\hat{w} = 0$. Usando nuevamente que la transformada de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ obtenemos que $w = 0$. Luego u es la única solución en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Otra forma de ver que $w = 0$ es la siguiente. Multiplicando $\mathcal{L}w + w = 0$ por w e integrando por partes, se obtiene:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} w^2(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} w(x) \partial_{x_j} w(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} w^2(x) dx \geq 0,$$

ya que $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (igualdad) y A es semidefinida positiva (primera desigualdad). Luego, $w = 0$.

4. Sean $T > 0$ y $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,T]) \cap C^1([0,1] \times [0,T])$ una función que satisface:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0 & x \in (0,1), t \in (0,T], \\ u_x(1,t) &\leq 0 \leq u_x(0,t) & t \in (0,T], \\ u(x,0) &\leq 0 & x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Demostrar que $u \leq 0$ en $(0,1) \times (0,T]$.

Sugerencia: Considerar la función $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon(x(1-x) - 2t)$, $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$, para $\varepsilon > 0$ dado.

Resolución. Anotamos $U_T = (0,1) \times (0,T]$. Consideramos $\varepsilon > 0$ y definimos:

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon(x(1-x) - 2t) \quad (x,t) \in \overline{U_T}.$$

Ahora observamos que $u_\varepsilon \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ y satisface:

$$\begin{aligned} \partial_t u_\varepsilon(x,t) - \partial_{xx} u_\varepsilon(x,t) &= 0 & x \in (0,1), t \in (0,T], \\ \partial_x u_\varepsilon(1,t) &\leq -\varepsilon < 0 & t \in (0,T], \\ \partial_x u_\varepsilon(0,t) &\geq \varepsilon > 0 & t \in (0,T], \\ u_\varepsilon(x,0) &\leq \varepsilon x(1-x) & x \in [0,1]. \end{aligned}$$

A continuación vamos a demostrar que $\max_{\overline{U_T}} u_\varepsilon = \max_{x \in [0,1]} u_\varepsilon(x,0)$. Notar que esto implica:

$$u(x,t) = u_\varepsilon(x,t) - \varepsilon(x(1-x) - 2t) \leq \varepsilon \max_{x \in [0,1]} x(x-1) + 2\varepsilon t \leq \frac{\varepsilon}{4} + 2\varepsilon T \quad \forall (x,t) \in U_T,$$

a partir de lo cual se obtiene $u \leq 0$ en U_T , dada la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$.

Primero observamos que u_ε satisface el principio del débil máximo en U_T , así que:

$$\max_{\overline{U_T}} u_\varepsilon = \max_{\partial_p U_T} u_\varepsilon,$$

donde:

$$\partial_p U_T = \overline{U_T} \setminus U_T = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times (0,T]).$$

Si el máximo de u sobre $\partial_p U_T$ se alcanza en un punto de la forma $(0,t)$ con $t \in (0,T]$, entonces $\partial_x u_\varepsilon(0,t) \leq 0$, lo cual da una contradicción. Lo mismo ocurre si se supone que el máximo se alcanza en un punto de la forma $(1,t)$ con $t \in (0,T]$. Por lo tanto,

$$\max_{\partial_p U_T} u_\varepsilon = \max_{x \in [0,1]} u_\varepsilon(x,0).$$