Ecuaciones diferenciales con retardo: del análisis complejo a la topología

Pablo Amster

Universidad de Buenos Aires / IMAS-CONICET

Resumen

Objetivo: darnos una ducha a cierta temperatura T_e.

$$x = T - T_e$$

Caso sin retardo:

$$x'(t) = -ax(t)$$

para cierta constante $a > 0$.

Las soluciones $x(t) = x_0 e^{-at}$ satisfacen

$$x(t) \to 0 \qquad \text{para } t \to +\infty.$$

Versión más realista

Calé, *Buenos Aires en camiseta.*

Modelo con retardo

$$x'(t) = -ax(t-\tau)$$

con $\tau > 0$ retardo constante.

Ejemplo: $a = 1$, $\tau = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x(t) = \operatorname{sen}(t)$ es solución, pues

$$x'(t) = \cos(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -x(t-\tau).$$

Conclusión: las soluciones pueden oscilar.

Valores característicos

Caso $\tau = 0$: $\quad x(t) = e^{\lambda t} \Longrightarrow \lambda e^{\lambda t} = -ae^{\lambda t}$

$$\chi(\lambda) := \lambda + a \quad \text{(polinomio característico)}$$

$$\{\text{Soluciones}\} = \mathrm{gen}\{e^{-at}\}.$$

Caso $\tau > 0$: $\quad \lambda e^{\lambda t} = -ae^{\lambda(t-\tau)}$

$$\chi(\lambda) = \lambda + ae^{-\lambda\tau}.$$

Valores característicos: $\lambda = x + iy$ con

$$\begin{cases} x = -ae^{-x\tau}\cos(y\tau) \\ y = ae^{-x\tau}\mathrm{sen}(y\tau). \end{cases}$$

Infinitos valores característicos

$$\lambda = -ae^{-\lambda\tau}$$

$$z = \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow f(z) = 1,$$

donde

$$f(z) := -aze^{-\tau/z} \qquad f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

$$\text{(Gran) Picard} \Longrightarrow \#\left(f^{-1}(1)\right) = \aleph_0.$$

Consejos para una buena ducha

$\chi(\lambda) = \lambda + ae^{-\lambda\tau}$ tiene:

- 2 raíces reales si $a\tau < \frac{1}{e}$.
- 1 raíz real si $a\tau = \frac{1}{e}$.
- ninguna raíz real si $a\tau > \frac{1}{e} \Longrightarrow$ todas las soluciones oscilan.

La ducha más temida:

$$a\tau > \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \exists\, \lambda / \mathrm{Re}(\lambda) > 0$$

Resumen

Modelos elementales

$x(t)$: población a tiempo t.

Malthus:

$$x'(t) = -dx(t) + bx(t) \Longrightarrow x(t) = x(0)e^{(b-d)t}$$

Con retardo:

$$x'(t) = -dx(t) + bx(t-\tau)$$

$\tau =$ tiempo hasta alcanzar la 'madurez'.

Ecuación logística

Verhulst:

$$x'(t) = rx(t)(M - x(t)).$$

Con retardo (Hutchinson, 1948):

$$x'(t) = rx(t)(M - x(t - \tau)).$$

Conjetura de Wright

Cherwell/Hoffman de Visme: argumento 'heurístico' para el PNT:

$y(x)$ mejor aproximación suave de $\pi(x) \Longrightarrow$

$$y''(x) = -\frac{y'(x)y'(\sqrt{x})}{2x}.$$

Cambio de variables (Wright):

$$y'(x)\ln x = z, \qquad 2^t = \ln x$$

$$z'(t) = \ln 2\, z(t)(1 - z(t-1))$$

$r \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow z \equiv 1$ atractor de las soluciones positivas.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)\ln x}{x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(y'(x)\ln x + \frac{y(x)}{x} \right) \underset{L'H}{=} 1$$

$$\Longrightarrow y(x) \sim \tfrac{x}{\ln x} \text{ para } x \gg 0.$$

Problema linealizado:

$$w = z - 1,\ w'(t) = -rw(t-1) \Longrightarrow 0 \text{ es atractor si } r < \tfrac{\pi}{2}.$$

Conjetura (1955): $z = 1$ es estable para $r < \frac{\pi}{2}$.

Solución (J. van den Berg, J. Jaquette 2017): Wright was right!

Modelo de Nicholson

$$x'(t) = -dx(t) + px(t-\tau)e^{-\gamma x(t-\tau)}.$$

Hechos básicos:

- $p \leq d \implies$ no hay equilibrios positivos, 0 atractor global.
- $p > d \implies$ único equilibrio positivo e.

Resumen

Problema T-periódico

$$p(t), d(t) > 0 \qquad T\text{-periódicas}$$

Ejercicio: $p(t) \leq d(t)$ para todo $t \Longrightarrow 0$ atractor $\Longrightarrow$ no hay soluciones T-periódicas positivas.

Problema: $p(t) > d(t)$ para todo $t \Longrightarrow$ soluciones T-periódicas?

Pequeña ayuda: se puede suponer $T \geq \tau$.

Caso $\tau = 0$: la respuesta no se hace esperar

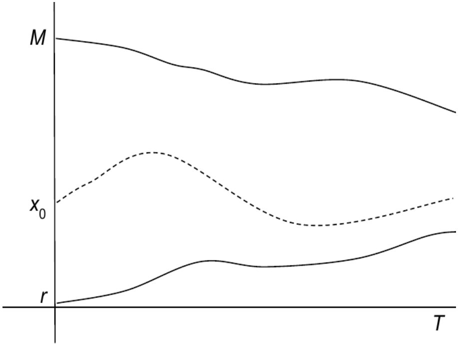
$$x'(t) = x(t)\left(-d(t) + p(t)e^{-\gamma x(t)}\right)$$

Existencia y unicidad: $x_0 > 0 \Longrightarrow \exists!\, x(t)$ con $x(0) = x_0$.

$$x(t) = M \gg 0 \Longrightarrow x'(t) < 0,$$

$$0 < x(t) = r \ll 1 \Longrightarrow x'(t) > 0.$$

Conclusión: $x_0 \in [r, M] \Longrightarrow x(t) \in [r, M]$ para todo $t > 0$.



Bolzano (Brouwer) $\Longrightarrow \exists\, x_0 \,/ x(T) = x_0$.

Caso $\tau > 0$: Poincaré junto a un calefón

Repaso:

1. $P(x_0) := x(T)$, bien definido, continuo ($P =$ Poincaré).
2. $P([r, M]) \subset [r, M]$.
3. Brouwer $\Longrightarrow P$ tiene un punto fijo.

Problema: extender la idea para $\tau > 0$.

PVI: Existencia, unicidad, continuidad

Valor inicial: $\varphi \in C([-\tau, 0])$.

Paso a paso:

1. Resolver la ecuación *ordinaria* para $t \in [0, \tau]$:

$$x'(t) = -d(t)x(t) + p(t)\varphi(t)e^{-\gamma\varphi(t)}, \qquad x(0) = \varphi(0).$$

2. Usando la solución en $[0, \tau]$, resolver ahora en $[\tau, 2\tau]$.
3. Etc.

Poincaré en dimensión infinita

$\varphi \in C([-\tau, 0])$, definimos

$$P\varphi(\theta) := x_\varphi(T + \theta) \qquad \theta \in [-\tau, 0].$$

Luego

$$P : dom(P) \subset C([-\tau, 0]) \to C([-\tau, 0])$$

es continuo.

Puntos fijos de P

Teorema (Schauder):

E espacio de Banach, $C \subset E$ cerrado, convexo y acotado. Si $f : C \to C$ es continua y $\overline{f(C)}$ es compacto, entonces existe $x \in C$ tal que $f(x) = x$.

Aplicación a Nicholson:

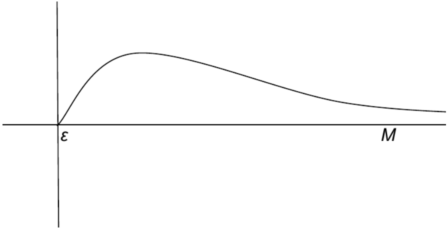
$$C := \{\varphi \in C([-\tau, 0]) : \varepsilon \leq \varphi(t) \leq M\}$$

$$x'(t) = -d(t)x(t) + p(t)x(t-\tau)e^{-\gamma x(t-\tau)}$$

Como antes, $x(t) = M \gg 0 \Longrightarrow x'(t) < 0$.

Cotas inferiores

$$x'(t) = -d(t)x(t) + p(t)x(t-\tau)e^{-\gamma x(t-\tau)}$$



$$x(t) \geq \varepsilon = x(t_0) \Longrightarrow x'(t_0) \geq -d(t_0)\varepsilon + p(t_0)\varepsilon e^{-\gamma\varepsilon} > 0.$$

Compacidad: $\|x_\varphi\|_\infty \leq M \Longrightarrow \|x'_\varphi\|_\infty$ acotado.

Echando más topología al fuego

$$u'(t) = g(u(t)) + p(t, u(t), u(t-\tau)))$$

g, p continuas y acotadas, p es T-periódica en t.

Landesman-Lazer:

$$|g(\pm\infty)| > \|p\|_\infty, \qquad g(+\infty)g(-\infty) < 0.$$

Condición de Nirenberg ($n = 2$):

$$\lim_{s\to+\infty} g(se^{it}) := \gamma(t)$$

uniformemente para $t \in [0, 2\pi]$.

Teorema:

1. $\liminf_{|u|\to\infty} |g(u)| > \|p\|_\infty$.
2. $I(\gamma, 0) \neq 0$.

Entonces hay soluciones T-periódicas.

Condición de Ortega:

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{g(se^{it})}{|g(se^{it})|} := \gamma(t)$$

uniformemente para $t \in [0, 2\pi]$.

Caso especial: $g(x, y) = \nabla G(x, y) \Longrightarrow$ no hace falta pedir g acotada.

Por ejemplo...

$$z'(t) = g(\overline{z}(t)) + p(t, z(t), z(t-\tau)))$$

g un polinomio $\Longrightarrow$ es un sistema gradiente.

Explicación directa: z solución T-periódica $\Longrightarrow$

$$z'(t)\overline{z}'(t) = (g \circ \overline{z})'(t) + p(t, z(t), z(t-\tau)))\overline{z}'(t)$$

$$\int_0^T |z'(t)|^2\, dt \leq \|p(t, z(t), z(t-\tau))\|_{L^2}\|z'\|_{L^2}$$

$$\|z'\|_{L^2} \leq T^{1/2}\|p\|_\infty$$

Además $\liminf_{|z|\to\infty} |g(z)| = \infty$ y

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{g(se^{it})}{|g(se^{it})|} = \frac{a_n}{|a_n|} e^{-int}$$

cuyo índice es $-n$.

En particular,

$$p = 0 \Longrightarrow \|z'\|_{L^2} \leq 0 \Longrightarrow z \text{ constante, } g(z) = 0.$$

Para pensar: ¿por qué no funciona si g no es un polinomio?

Referencias

- J. B. van den Berg, J. Jaquette, *A proof of Wright's conjecture.* Journal of Differential Equations 264 No. 12) (2018), 7412–7462.

- V. Kolmanovskii, A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Mathematics and its Applications, Vol. 463, Kluwer Academic Publishers, 1999.

- E. Liz, G. Robledo y S. Trofimchuk, *La conjetura de Wright: entre la distribución de los números primos y el crecimiento de la población.* Cubo. Matemática Educacional 3 (2001), 89–107.

- R. Ortega and L. Sánchez: *Periodic solutions of forced oscillators with several degrees of freedom*, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 308–318.

Gracias por su atención!!