Análisis no lineal - Práctica $[6, +\infty)$

Grado de Leray-Schauder

1. Extender el teorema de Borsuk (y sus consecuencias) para funciones del tipo $F = I - K$ impares en un espacio de Banach.

2. Sean $\hat{x}, r \in l^2(\mathbb{R})$ y sea $\mathcal{C}$ el cubo de Hilbert definido como

$$\mathcal{C} := \{x \in l^2 : |x_i - \hat{x}_i| \leq |r_i| \quad \text{para todo } i\}.$$

   Probar que si $F : \mathcal{C} \to l^2$ es continua y satisface

$$F_i(y) \leq 0 \leq F_i(z)$$

   para todo par de elementos $y, z \in \mathcal{C}$ tales que $y_i = \hat{x}_i - r_i$, $z_i = \hat{x}_i + r_i$, entonces F tiene al menos un cero.

3. Dada $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, probar usando grado que la ecuación $u''(t) = f(t, u(t))$ con condición de Dirichlet $u(0) = u_0, u(1) = u_1$ tiene solución en los siguientes casos:

   (a) f sublineal en u.

   (b) f monótona creciente en u.

   (c) $f(t, u) \cdot u \geq 0$ para $|u| = R \geq |u_0|, |u_1|$.

   Generalizar para $f(t, u, u')$ con una condición de crecimiento apropiada.

4. Obtener un teorema de continuación para el problema T-periódico

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau))$$

   con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ continua y T-periódica en t.

5. Sean $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ continuas y T-periódicas en t. Supongamos que g es estrictamente monótona en u y sea $\phi(u) := \int_0^T g(t, u)\, dt$.

   (a) Probar que $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Im}(\phi)$ es un homeomorfismo.

(b) Probar que el problema con retardo

$$u'(t) = -a(t) + g(t, u(t-\tau))$$

tiene al menos una solución T-periódica si y solo si $\int_0^T a(t)\,dt \in \mathrm{Im}(\phi)$. *Sugerencia*: si $u \in C_T^1$ verifica $u'(t) \geq -a(t)$ entonces $u_{\max} \leq u_{\min} + \int_0^T a(t)\,dt$.

(c) Probar que la ecuación de Mackey-Glass

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \frac{b(t)x(t)}{c(t) + x(t-\tau)^m}$$

con $a, b, c \in C_T$ positivas tiene al menos una solución T-periódica positiva si y solo si $\overline{\frac{b}{c} - a} > 0$.

6. Para el problema planteado en el apunte (clases 18-19)

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda b(t)e^{x(t-\tau)}$$

con $a, b \in C_T$ positivas y $\lambda > 0$, probar que si λ es chico entonces hay al menos dos soluciones T-periódicas positivas.

Sugerencia: en el teorema de continuación, observar que para todo $\lambda > 0$ existen $R > r > 0$ tales que vale $\phi(x) > 0$ si $x \notin (r, R)$. Además, para $M > 0$ fijo vale $\phi(M) < 0$ si λ es suficientemente chico.

7. (a) Probar el teorema de valor medio para integrales vectoriales: dada $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua y cerrada, se cumple que

$$\overline{\gamma} \in \mathrm{co}(\mathrm{Im}(\gamma)),$$

donde 'co' denota la cápsula convexa.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ continua y T-periódica en t. Si el problema $u'(t) = f(t, u(t), u(t-\tau))$ tiene alguna solución T-periódica, entonces $0 \in \mathrm{co}(\mathrm{Im} f)$.

8. Probar que la ecuación $u'' + \operatorname{sen} u^{1/3} = p(t)$ tiene infinitas soluciones T-periódicas para cualquier $p \in C_T$ de promedio 0.

9. Considerar la ecuación de Liénard

$$u''(t) + f(u(t))u'(t) + g(u(t)) = p(t)$$

donde f y g son continuas y $p \in C_T$ de promedio 0. Supongamos que existe R_0 tal que $g(u)g(-u) < 0$ para $u \geq R_0$. Probar que existen soluciones T-periódicas en las siguientes situaciones:

(a) g acotada.

(b) $g(u) < 0 < g(-u)$ para $u \geq R_0$.

(c) $f(u) \geq c > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Un caso particular que vimos en clase: $f \equiv \alpha > 0$, $g(u) = u^3$.

10. Probar el siguiente teorema de Nirenberg: Sea $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ acotada y $p \in C_T$ de promedio 0. Supongamos que existen los límites radiales

$$g_v := \lim_{s \to +\infty} g(sv)$$

y son uniformes para $v \in S^{N-1} := \partial B_1(0)$. Supongamos que vale:

(a) $g_v \neq 0$ para todo $v \in S^{N-1}$.

(b) $deg(g, B_R(0), 0) \neq 0$ para R suficientemente grande.

Entonces el problema periódico para el sistema $u'' + g(u) = p(t)$ tiene al menos una solución.

11. *Teorema de Nirenberg, versión no asintótica*: sea $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ acotada y $p \in C_T$ de promedio 0 y sea $r > 0$ tal que toda solución T-periódica del problema $u'' + g(u) = \lambda p$ con $\lambda \in (0, 1]$ satisface $\|u - \overline{u}\|_\infty \leq r$. Supongamos que existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado tal que

(a) $0 \notin \mathrm{co}(g(B_r(x)))$ para todo $x \in \partial\Omega$.

(b) $deg(g, \Omega, 0) \neq 0$.

Entonces el problema periódico para el sistema $u'' + g(u) = p(t)$ tiene al menos una solución.

12. Generalizar el ejercicio anterior para el problema

$$u''(t) + c(t)u'(t) + g(u(t)) = p(t)$$

donde $c \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En particular, si $c > 0$ no hace falta pedir que g sea acotada, redefiniendo apropiadamente el valor de r.

13. Demostrar el teorema de Lazer-Leach empleando teoría de grado.