# Métodos topológicos en el análisis no lineal
# Práctica 0 (primera parte)

## 1 Conceptos básicos

1. Repasar los siguientes conceptos de espacios métricos:

   (a) Abiertos y cerrados, clausura, interior, densidad.

   (b) Límites y continuidad.

   (c) Compacidad

   (d) Completitud.

   (e) Conexión.

2. Repasar conceptos básicos de espacios normados y verificar que los siguientes son espacios de Banach:

   (a) $\mathbb{R}^n$, con la norma usual $|x| := \left(\sum x_j^2\right)^{1/2}$.

   (b) $C(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n \text{ continua}\}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ abierto acotado, con la norma $\|f\|_\infty := \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$.

   (c) $C^j(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n \text{ de clase } C^j\}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ abierto acotado, con la norma $\|f\|_{C^j} := \max\{\|f\|_\infty, \|Df\|_\infty, \ldots, \|D^j f\|_\infty\}$. Una función se dice $C^j$ en $\overline{\Omega}$ si se puede extender a una función $C^j$ definida en un entorno de $\overline{\Omega}$.

3. Repasar: espacio de Hilbert, Cauchy-Schwarz, espacio $L^2(a, b)$ (para el que no haya visto teoría de la medida, pensarlo simplemente como el completado de $C([a, b])$ para el producto interno $\langle f, g\rangle := \int_a^b fg$).

4. Repasar las versiones elementales de los teoremas de Stone-Weierstrass y Arzelá-Ascoli.

## 2 Repaso de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, $(t_0, x_0) \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, localmente Lipschitz en $x$. Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite una (única) solución $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ para cierto $\delta > 0$. Dar una cota inferior para $\delta$.

2. **Lema de Gronwall**: Sean $u, v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continuas tales que

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds$$

para todo $t$ y cierto $\alpha \geq 0$. Entonces

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}$$

para todo $t$.

3. **Dependencia continua**:
Sean $\Omega$, $(t_0, x_0) \in \Omega$, $f$ y $x(t)$ como en el ejercicio 1, y consideremos un punto $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in B_r(t_0, x_0)$ para $r > 0$ suficientemente pequeño. Probar que la solución $\tilde{x}$ del problema

$$\begin{cases} \tilde{x}' = f(t, \tilde{x}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

verifica

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \alpha e^{L|t - t_0|}$$

para ciertas constantes $\alpha = \alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0), L \geq 0$, y $t$ cerca de $t_0$, en donde $\alpha$ verifica: $\alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \to 0$ para $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \to (t_0, x_0)$. Deducir que el flujo $\Phi$ definido por $\Phi(t, t_0, x_0) := x(t)$ es una función continua. Probar que si $f$ es de clase $C^k$, entonces $\Phi$ es de clase $C^k$.

4. **Extensión de soluciones**

   (a) Sean $\Omega$, $(t_0, x_0) \in \Omega$, $f$ como en el ejercicio 1, y sea $K \subset \Omega$ un compacto. Probar que si una solución de $x' = f(t, x)$ definida en $[t_0, t_1)$ no se puede extender hasta $t_1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $(t, x(t)) \notin K$ para $t \in (t_1 - \delta, t_1)$. Concluir que si $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \subset \Omega$ entonces $|x(t)| \to \infty$ para $t \to t_1^-$.

   (b) En la situación anterior, deducir la existencia de un intervalo maximal $I_{t_0,x_0}$ donde $x$ está definida. Probar que $I_{t_0,x_0}$ es abierto.

(c) Probar que si $t_1 \in I_{t_0,x_0}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $t_1 \in I_{\tilde{t}_0,\tilde{x}_0}$ para $|(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) - (t_0, x_0)| < \delta$. Deducir que el conjunto

$$\bigcup_{(t_0,x_0)} \{(t_0, x_0)\} \times I_{t_0,x_0} \subset \Omega \times \mathbb{R}$$

es abierto.

(d) Probar que si $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, localmente Lipschitz en $x$ y tiene crecimiento a lo sumo lineal en $x$ (es decir, $|f(t, x)| \leq a|x| + b$), entonces toda solución del problema $x' = f(t, x)$ puede extenderse a todo el intervalo $[t_0, t_1]$.

# 3 La ecuación lineal de segundo orden

1. Probar que el problema

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = \psi(t)$$

con $a, b, \psi : [0, T] \to \mathbb{R}$ continuas, es equivalente a la ecuación $Lu = \varphi(t)$, en donde

$$Lu(t) = (-p(t)u'(t))' + q(t)u(t)$$

para ciertas $q, \varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ continuas y cierta $p : [0, T] \to \mathbb{R}_{>0}$ de clase $C^1$.

2. Sea $L$ como en el ejercicio anterior, y sea $\{u_1, u_2\}$ una base de soluciones del problema homogéneo $Lu = 0$. Probar que $w = p(u_1u_2' - u_2u_1')$ es una constante no nula.

3. Sean $L$, $u_1$, $u_2$ y $w$ como antes, y sea $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que todas las soluciones de la ecuación $Lu = \varphi$ son de la forma $u = c_1u_1 + c_2u_2$, con

$$c_1 = k_1 + \frac{1}{w}\int_0^t u_2(s)\varphi(s)\, ds,$$

$$c_2 = k_2 - \frac{1}{w}\int_0^t u_1(s)\varphi(s)\, ds.$$

4. Sea $L$ como antes. Probar que si el problema de Dirichlet

$$Lu = 0, \qquad u(0) = u(T) = 0$$

admite solamente la solución trivial, entonces el problema no homogéneo

$$Lu = \varphi, \qquad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T$$

tiene una única solución para cualquier $\varphi$ continua y cualquier dato de borde $(u_0, u_T) \in \mathbb{R}^2$. Obtener conclusiones similares para las condiciones de Neumann

$$u'(0) = u_0, \qquad u'(T) = u_T$$

y periódicas

$$u(0) = u(T), \qquad u'(0) = u'(T).$$

5. Sea $L$ como antes, con $q \geq 0$. Probar que para toda función continua $\varphi$ el problema

$$Lu = \varphi, \qquad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T,$$

tiene solución única. ¿Puede decirse lo mismo para las condiciones de Neumann o periódicas?

6. Sea $L$ como antes, y sea $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente en $u$. Probar que el problema

$$Lu = f(t, u), \qquad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T$$

tiene *a lo sumo* una solución.

7. *Desigualdad de Poincaré*: existe una constante $c$ tal que si $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$ con $u(0) = u(T) = 0$, entonces

$$\int_0^T u(t)^2 \, dt \leq c \int_0^T u'(t)^2 \, dt.$$

*Comentario*: se puede probar que la constante óptima es $c = \left(\frac{T}{\pi}\right)^2$.

8. *Desigualdad de Wirtinger*: existe una constante $c$ tal que si $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$ con $u(0) = u(T)$ y $u'(0) = u'(T)$, entonces

$$\int_0^T (u(t) - \overline{u})^2 \, dt \leq c \int_0^T u'(t)^2 \, dt$$

en donde $\overline{u}$ es el promedio de $u$, dado por $\overline{u} := \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \, dt$. *Comentario*: en este caso, la constante óptima es $c = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$.

9. Probar que existe una constante $c$ tal que si $u'$ es de clase $C^1$ y $u'(t_0) = 0$ para algún $t_0$ entonces

$$\|u'\|_\infty \leq c \|u''\|_{L^2(0,T)}.$$

Generalizar para un operador $L$ como antes.

## 3.1 La función de Green

En esta sección veremos que, en ocasiones, la única solución de un problema lineal $Lu = \varphi$ con cierta condición de borde se puede expresar en términos de un operador integral (el inverso de $L$), aplicado a $\varphi$.

Vamos a encontrar esta expresión por medio de un cálculo directo cuando se trata el problema lineal

$$\begin{cases} u'' = \varphi(t) \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

En efecto, podemos escribir

$$u'(t) = c + \int_0^t \varphi(s)ds = c + \int_0^T \chi_{[0,t)}(s)\varphi(s)ds,$$

y entonces

$$u(t) = \int_0^t \left(c + \int_0^T \chi_{[0,r)}(s)\varphi(s)ds\right)dr = ct + \int_0^T \chi_{[0,t}(r)\left(\int_0^T \chi_{[0,r)}(s)\varphi(s)ds\right)dr$$

$$= ct + \int_0^T \varphi(s)\left(\int_0^T \chi_{[0,t)}(r)\chi_{[s,T]}(r)dr\right)ds = ct + \int_0^T \varphi(s)\psi(t,s)ds,$$

donde

$$\psi(t,s) = \begin{cases} 0 & t \leq s \\ t-s & s < t. \end{cases}$$

Además, como $u(T) = 0$, vale:

$$c = -\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(s)\psi(\alpha,s)ds = -\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(s)(T-s)ds.$$

Luego

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)\varphi(s)ds,$$

en donde

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t}{T}(T-s) & t \leq s \\ -\frac{s}{T}(T-t) & t > s. \end{cases}$$

La función $G : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ se denomina *función de Green* del problema.

1. Deducir una expresión similar para condiciones de Dirichlet no homogéneas.

2. Generalizar para condiciones de Neumann y periódicas.

3. Generalizar para un operador $L$ como en los ejercicios anteriores, y calcular explícitamente la función de Green para el caso $Lu = u'' - \lambda u$, con $\lambda > 0$.