Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 3 - 7/9 (versión preliminar)

1 Previously on "Métodos topológicos..."

Shooting va, shooting viene, en las dos primeras clases vimos que mediante una herramienta elemental (el teorema de Bolzano) es posible resolver problemas no tan elementales. En particular, para el problema periódico

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T)$$

vimos que hay al menos una solución cuando se asume la existencia de $\alpha \leq \beta$ tales que

$$\alpha(0) = \alpha(T), \qquad \beta(0) = \beta(T)$$

y además

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$$

o viceversa:

$$\alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t)), \qquad \beta'(t) \leq f(t, \beta(t)).$$

En particular, esto permite resolver de manera inmediata el problema

$$u'(t) = f(u(t)) + p(t), \qquad u(0) = u(T)$$

con p continua y

$$\lim_{u \to -\infty} f(u) = -\infty, \qquad \lim_{u \to +\infty} f(u) = +\infty$$

o al revés:

$$\lim_{u \to -\infty} f(u) = +\infty, \qquad \lim_{u \to +\infty} f(u) = -\infty.$$

Habíamos quedado en estudiar ahora el caso en que f se comporta como un polinomio no constante de grado par, es decir, tiende a la misma clase de infinito para $|u| \to \infty$. Para fijar ideas, supongamos

$$\lim_{|u| \to \infty} f(u) = +\infty$$

y escribamos $p(t) = p_0(t) - s$, con p_0 de promedio 0. Como anticipamos, se puede probar entonces un resultado 'tipo Ambrosetti-Prodi':

Proposición 1.1 *En la situación anterior, existe s^* tal que el problema:*

1. *No tiene solución para $s < s^*$.*
2. *Tiene al menos una solución para $s = s^*$.*
3. *Tiene al menos dos soluciones para $s > s^*$.*

Con el objetivo de entender lo que vamos haciendo, veamos una demostración en estilo más bien "charlado". Como ya dijimos (integrando) si u es solución entonces

$$s = \frac{1}{T}\int_0^T f(u(t))\,dt \in \mathrm{Im}(f),$$

de modo que no hay soluciones para $s < f_{\min} := \min\{f(u) : u \in \mathbb{R}\}$. Veamos ahora que si hay solución para cierto $\hat{s}$, entonces hay *al menos dos* soluciones para $s > \hat{s}$. En efecto, para s fijo es claro que si $R \gg 0$ vale $f(R)+p_0(t)-s > 0$ para todo t, de modo que podemos tomar $\beta \equiv R$ como supersolución. El problema es que ahora tomar $\alpha \equiv -R \ll 0$ no nos sirve, porque la desigualdad queda para el mismo lado: $f(-R)+p_0(t)-s > 0$. La pregunta es entonces: ¿a quién podemos tomar como subsolución? La respuesta es bastante inmediata: alcanza con tomar $\alpha = \hat{u}$, aquella solución para $\hat{s}$ que existe por hipótesis, luego vale

$$\hat{u}'(t) = f(\hat{u}(t)) + p_0(t) - \hat{s} > f(\hat{u}(t)) + p_0(t) - \hat{s}.$$

Luego, existe al menos una solución del problema para s tal que $\hat{u}(t) \leq u(t) \leq R$ para todo t. Y de paso, de manera gratuita, encontramos una segunda solución ya que, como dijimos, los roles de α y β son intercambiables. Luego, basta tomar ahora

$$\beta = \hat{u}, \qquad \alpha \equiv -R.$$

Pero la alegría de haber encontrado dos soluciones así, 'de taquito' puede borrarse de un plumazo cuando observamos que, en realidad, todavía no comprobamos que hay soluciones para *algún* valor de s. Y hay un detalle clave en la cuenta anterior: a la hora de encontrar una subsolución, tuvimos que echar mano de la hipótesis para poder usar la $\hat{u}$ salvadora. Pero es claro que si elegimos por ejemplo $\alpha \equiv u_0$ con u_0 un valor en el que f alcanza su mínimo absoluto, entonces para s suficientemente grande vale

$$\alpha'(0) = 0 \geq f(\alpha(t)) + p_0(t) - s.$$

Así que: ¡alivio! *Habemus* solución, al menos cuando s es grande. Notemos que con el mismo criterio de antes, podríamos decir que hay dos, una entre u_0 y R y otra entre $-R$ y u_0. ¿Por qué el enunciado dirá que para cierto valor s^* solo se puede probar que hay una?

En primer lugar, observemos que la elección de u_0 es la mejor posible si pretendemos que α sea constante. Pero eso vale solamente cuando $s \geq f(u_0) + p_0(t)$ para todo t. Sin embargo, no toda subsolución es constante, de modo que cabe esperar, para valores más chicos de s que exista α periódica no constante tal que $\alpha'(t) \geq f(\alpha(t)) + p_0(t) - s$. Y como lo que dijimos para $R \gg 0$ sigue valiendo, entonces para tales valores de s tenemos, como antes, una solución entre α y R y otra entre $-R$ y α. Entonces volvemos a preguntar: ¿será que siempre hay dos, che?

La respuesta es más sencilla de lo que parece: para algún s podría pasar que no haya subsoluciones "propias", es decir, que cumplan lo anterior pero la desigualdad sea estricta para algún t. En tal caso α es solución y las "dos" soluciones entre α y R y entre $-R$ y α podrían ser una sola: la mismísima α.

Para terminar de probar el resultado vamos a ver que el conjunto $\{s \in \mathbb{R} :$ hay solución$\}$ es cerrado. Como además es acotado inferiormente, su ínfimo será precisamente el valor s^* que estamos buscando.

Como es de esperar, la idea es tomar ahora una sucesión de valores s_n para los cuales hay alguna solución u_n y probar que si $s_n \to s$ entonces también hay al menos una solución para s. Y, teniendo en mente el teorema de Arzelá-Ascoli, no estaría nada mal probar que la sucesión $\{u_n\}$ es (uniformemente) acotada y equicontinua. Para eso, vamos a probar algo mejor, que nos va a servir para otros ejemplos. Por conveniencia, lo vamos a escribir en dos lemas separados. Aquí se viene el primero:

Lema 1.1 *Existe una constante C tal que cualquier solución u del problema*

$$u'(t) = f(u(t)) + p_0(t) - s, \qquad u(0) = u(T)$$

verifica

$$|\|u - \overline{u}\|_\infty \leq C\|u'\|_{L^2} \leq C\|p_0\|_{L^2}.$$

<u>*Demostración*</u>: Multiplicando la ecuación por u' e integrando, resulta

$$\int_0^T u'(t)^2\, dt = \int_0^T [f(u(t))u'(t) + p_0(t)u'(t) - su'(t)]\, dt.$$

El detalle clave es que entre los términos del lado derecho hay algunos que desaparecen, gracias a que $u(T) = u(0)$. Sobre el último, no hay dudas: ya podemos olvidarnos de él. Pero la gracia es que también desaparece el primero, porque

$$\int_0^T f(u(t))u'(t)\, dt = \int_0^T (F \circ u)'(t))\, dt = (F \circ u)\Big|_0^T = 0,$$

donde F es una primitiva de f. En consecuencia, usando Cauchy-Schwarz

$$\int_0^T u'(t)^2\, dt \leq \|p_0\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}$$

y en definitiva

$$\|u'\|_{L^2} \leq \|p_0\|_{L^2}.$$

Por otra parte, por el teorema de valor medio sabemos que $\overline{u} = u(t_0)$ para algún t_0, luego

$$|u(t) - u(t_0)| = \left|\int_{t_0}^t u'(t)\, dt\right| \leq \sqrt{T}\|u'\|_{L^2} \leq \sqrt{T}\|p_0\|_{L^2}$$

para todo t. $\square$

Observación 1.2 *Aunque es irrelevante en este ejemplo, una cota más fina se obtiene a partir de la llamada desigualdad de Sobolev, válida para cualquier u periódica:*

$$\|u - \overline{u}\|_\infty \leq \sqrt{\frac{T}{12}}\|u'\|_{L^2}.$$

Lo interesante de la cuenta anterior es que el valor $C\|p_0\|_{L^2}$ depende obviamente de p_0 pero no depende de f ni de s. El segundo lema nos dice que, ya en nuestro problema específico, podemos obtener las famosas cotas a priori para las soluciones:

Lema 1.3 *Consideremos el problema*

$$u'(t) = f(u(t)) + p_0(t) - s, \qquad u(0) = u(T)$$

con p_0 de promedio 0 y

$$\lim_{|u|\to\infty} f(u) = +\infty.$$

Dado $S > 0$, existe M tal que si $|s| \leq S$ entonces para toda solución u se verifica que $\|u\|_\infty \leq M$.

Demostración: Integrando la ecuación, resulta

$$0 = \int_0^T u'(t)\,dt = \int_0^T [f(u(t)) + p_0(t) - s]\,dt$$

y como p_0 tiene promedio 0 se deduce que

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(u(t))\,dt = s.$$

Pero entonces podemos escribir

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\overline{u} + a(t))\,dt = s,$$

donde $a(t) := u(t) - \overline{u}$ verifica, por el lema previo, $\|a\|_\infty \leq C\|p_0\|_{L^2} := r$. Una vez más, el teorema de valor medio dice que entonces

$$s \in f([\overline{u} - r, \overline{u} + r]). \tag{1}$$

Pero como f se va a infinito y el valor de s está acotado, (1) no puede ocurrir si $|\overline{u}|$ es demasiado grande. En resumen, existe R tal que $|\overline{u}| \leq R$ y en consecuencia

$$\|u\|_\infty \leq \|u - \overline{u}\|_\infty + |\overline{u}| \leq C + R := M.$$

$\square$

Volvamos ahora al asunto que nos preocupaba: ver que el conjunto de valores de s para los cuales hay solución del problema periódico es cerrado. Tomemos entonces una sucesión $\{s_n\}$ con respectivas soluciones u_n y supongamos $s_n \to s$. En particular, la sucesión $\{s_n\}$ es acotada y, por los lemas previos, tenemos que

$$\|u_n\|_\infty \leq M, \qquad \|u_n'\|_{L^2} \leq C.$$

Por Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión (que podemos volver a llamar $\{u_n\}$) que converge uniformemente a cierta u. Por la convergencia uniforme, es claro que u es continua y $u(0) = u(T)$; además, para todo t vale

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[u_n(0) + \int_0^t (f(u_n(\xi)) + p_0(\xi) - s_n)\, d\xi \right]$$

$$= u(0) + \int_0^t (f(u(\xi)) + p_0(\xi) - s)\, d\xi.$$

Esto prueba que u es solución para s: asunto terminado.

Es importante señalar que, a la hora de encontrar cotas a priori, la "papa" fue la relación (1). Por eso, en muchos casos se puede probar la existencia de soluciones aunque f permanezca acotada. A modo de ejemplo, tomemos la ecuación que se propone en el ejercicio xxxxxxx:

$$u'(t) = \operatorname{sen}(u(t)) + p_0(t)$$

con p_0 de promedio 0. Es claro que si u es solución T-periódica entonces $u + 2k\pi$ también, lo que reduce a cero nuestras probabilidades de encontrar cotas a priori. Pero, por el mismo motivo, alcanza con limitar nuestra búsqueda a soluciones cuyo promedio pertenezca al intervalo $[-\pi, \pi]$. Según el Lema 1.1, para todo t se tiene entonces

$$|u(t)| \leq \pi + r,$$

donde $r = C\|p_0\|_{L^2}$. Sin embargo, esto no es garantía de que haya solución. De hecho, el siguiente ejemplo, adaptado de un trabajo de Rafael Ortega [1], muestra que si $T > 2\pi$, entonces se puede encontrar p_0 de promedio 0 tal que el problema no tiene soluciones. Empecemos por observar que si definimos $P(t) = \int_0^t p_0(s)\, ds$ y $v(t) = u(t) - P(t)$, entonces el problema original es equivalente a

$$v'(t) = \operatorname{sen}(v(t) + P(t)), \qquad v(0) = v(T). \tag{2}$$

Ahora bien, es fácil encontrar P tal que este último problema no tiene solución: por ejemplo, para $P(t) = \frac{\pi}{2} - t$ la solución del problema de valores iniciales

$$v'(t) = \operatorname{sen}(v(t) + P(t)) \qquad v(0) = 0$$

es claramente $v_0(t) = t$. Pero $v(T) > 2\pi$ y hete aquí que las trayectorias no se cruzan, de modo que *toda* solución de la ecuación tal que $v(0) \in [0, 2\pi]$ satisface $v(T) > 2\pi$: en otras palabras, el operador de Poincaré no puede tener puntos fijos en $[0, 2\pi]$ y (de vuelta, usando que la función seno es 2π-periódica) en consecuencia en ningún lado.

Sin embargo, antes de ponernos a festejar tenemos que aceptar, con toda entereza, que esta P no nos sirve, ya que su derivada es -1, que claramente no tiene promedio 0. El detalle crucial es que si $\overline{p_0} = 0$ entonces su primitiva toma el mismo valor en ambos extremos, cosa que, obviamente, es un 'si y solo si': si P es derivable y $P(0) = P(T)$ entonces su derivada tiene promedio 0. Pero el pase mágico de Ortega consiste en darse cuenta de que el conjunto de funciones P para las que hay solución es *cerrado en el sentido de* L^1. Podemos entender esto sin necesidad de haber tomado un curso de teoría de la medida: simplemente significa que si hay soluciones de (2) para P_n y $\int_0^T |P_n(t) - P(t)|\, dt \to 0$, entonces también hay solución para P. Y esto ocurre, una vez más, gracias a Arzelà-Ascoli: si

$$v_n'(t) = \operatorname{sen}(v_n(t) + P_n(t)), \qquad v_n(0) = v_n(T)$$

podemos suponer como antes que $v_n(0) \in [0, 2\pi]$, y como v_n' está acotado (de manera uniforme), entonces podemos suponer que $\{v_n\}$ converge uniformemente a cierta v. Claro que al tomar el límite en la igualdad

$$v_n(t) = v_n(0) + \int_0^t \operatorname{sen}(v_n(s) + P_n(s))\, ds$$

uno podría preguntarse con cierta preocupación por la convergencia de la integral, siendo que P_n no tiene por qué converger a P de manera uniforme. Pero la solución es muy sencilla para quien conozca los teoremas clásicos de la teoría de integración (¿alguien dijo "convergencia mayorada"?). Aunque en este caso ni siquiera hace falta eso: alcanza con observar que

$$|\operatorname{sen}(v_n(s) + P_n(s)) - \operatorname{sen}(v(s) + P(s))| \leq |v_n(s) - v(s)| + |P_n(s) - P(s)|.$$

Concluimos entonces, como hicimos ya varias veces, que

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \operatorname{sen}(v(s) + P(s))\, ds$$

y entonces v es solución. Pero entonces podemos aprovechar la P que propusimos antes, para la cual no había solución, y aproximarla por funciones suaves que coinciden en los extremos, como se muestra en la Figura 1; es claro que la aproximación no puede ser uniforme, pero vale $\int_0^T |P_n(t) - P(t)|\, dt \to 0$.

Luego, como no hay solución del problema periódico para P, tampoco puede haberla para P_n cuando n es suficientemente grande.

Cabe observar que el anterior contraejemplo se apoyó en el hecho de que $T > 2\pi$. Esto no significa que no haya contrajemplos para períodos menores, aunque una cosa es cierta: una vez que fijamos el valor de $\|p_0\|_{L^2}$, entonces siempre hay solución si T es suficientemente chico. Ese es el espíritu del ejercicio

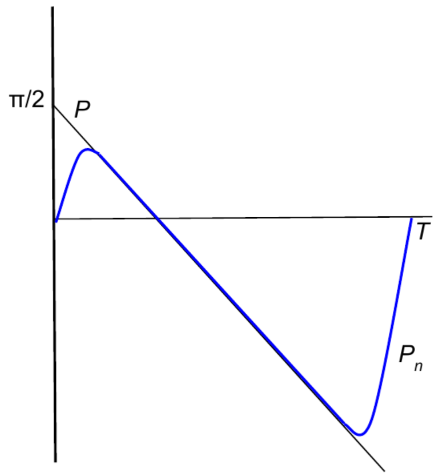

Figure 1: Aproximando P

xxxx de la Práctica 1, del que vamos a dar una pista, para así ganarnos la simpatía (o el enojo) del lector.[1]

La idea consiste en basarnos siempre en el Lema 1.1, que nos permite asegurar que si u es solución, entonces $\|u - \overline{u}\|_\infty \leq r$. En el lema obtuvimos $r = T^{1/2}\|p_0\|_{L^2}$, aunque la Observación 1.2 nos dice también vale para el valor $r = \left(\frac{T}{12}\right)^{1/2}\|p_0\|_{L^2}$; en cualquier caso, lo que nos interesa es que r se hace más chico a medida que achicamos T. En particular, si $r < \frac{\pi}{2}$, cualquier solución va a vivir siempre dentro de un intervalo de longitud π centrado en su promedio; en particular, si $|\overline{u}| \leq \frac{\pi}{2}$, dicha solución debe tomar valores siempre en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Ahora: ¿podría ocurrir por ejemplo que $\overline{u} = \frac{\pi}{2}$? La respuesta es que no, porque en ese caso $u(t) \in (0, \pi)$ para todo t, lo que contradice el hecho de que (integrando la ecuación) tiene que valer $\int_0^T \operatorname{sen}(u(t))\, dt = 0$. Esto vuelve a traernos a la cabeza una idea que hace algun tiempito no ponemos en práctica: truncar. Pero, a diferencia del problema de Dirichlet que vimos en las clases previas, en este caso truncar con una función acotada no aporta gran cosa: sin ir muy lejos, la función original *es* acotada. Más que truncar, sería 'cortar y pegar', poniendo alguna función para la que estemos seguros de que hay solución: por ejemplo, una de esas que se va a un infinito de cada lado. ¿Qué le parece, lector no enojado, un ejemplo como el de la Figura 2? Para esta función, el problema tiene una solución u. Además, sigue siendo cierto que $u(t) \in (\overline{u} - r, \overline{u} + r)$ y que

[1] En el prólogo de su *Geometría*, Descartes escribe: Espero que la posteridad me juzgue con benevolencia, no solo por las cosas que he explicado, sino también por aquellas que he omitido intencionadamente, para dejar a los demás el placer de descubrirlas". Esto explica la referencia al "enojo"; por eso, el lector que no desee verse limitado en sus placeres puede saltear los próximos párrafos.

$\int_0^T f(u(t))\,dt = 0$. Esto muestra que, salvo el caso $u \equiv \pm\pi$, que es trivial y solo ocurre cuando $p_0 = 0$, tiene que valer $|\overline{u}| < \frac{\pi}{2}$ y entonces: el truncamiento no trunca.

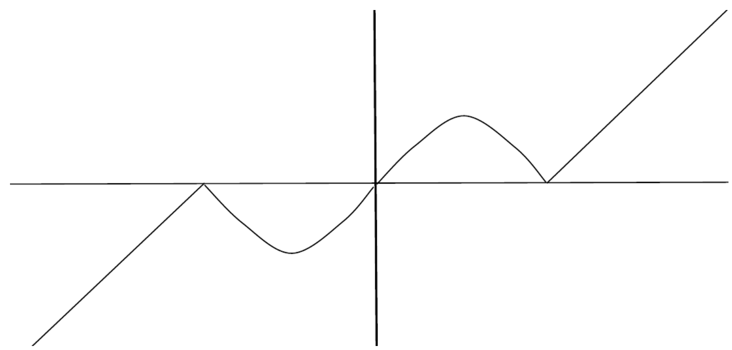

Figure 2: Corte y confección de la función seno

2 Un teorema espectral a puro *shooting*

Como último ejemplo de shooting en dimensión 1, vamos a resolver ahora una situación conocida habitualmente como *problema de Sturm-Liouville* o simplemente *problema de autovalores*:

$$-u''(t) + q(t)u(t) = \lambda u(t), \qquad u(0) = u(T) = 0, \tag{3}$$

donde $q : [0, T] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Se trata, acaso para decepción del público, de un problema *lineal*, aunque va a tener profunda relación con diversas cuestiones que veremos en la materia. Precisamente por la linealidad, es claro que la función $u \equiv 0$ es siempre solución: de lo que se trata es de encontrar los valores de λ para los cuales existen soluciones no triviales (más precisamente, un subespacio). ¿Y por qué es un problema de autovalores? Simplemente porque estamos pensando (en algún espacio apropiado) en el operador lineal $Lu := -u'' + qu$ y buscamos aquellos $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que existe una *autofunción* $u \neq 0$ tal que $Lu = \lambda u$.

El problema de Sturm-Lioville se puede plantear para diversas condiciones de borde. Para el caso de Dirichlet, es fácil verificar que todos los autovalores tienen multiplicidad 1, vale decir: si u y v son soluciones de (3) para cierto λ, entonces son linealmente dependientes. Esto se puede ver por ejemplo empleando el famoso wronskiano: si u y v son soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal de segundo orden, entonces el determinante

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix}$$

es distinto de 0 para todo t, cosa que falla si u y v se anulan en los extremos. El mismo argumento dice que los autovalores son simples también para la condición de Neumann $u'(0) = u'(T) = 0$, pero la situación cambia con las condiciones periódicas: por ejemplo, $\lambda = 1$ es un autovalor doble del problema

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi),$$

ya que $\cos(t)$ y $\operatorname{sen}(t)$ son soluciones linealmente independientes.

Pero, ¿en qué consiste un teorema espectral? A grandes rasgos, se trata de un resultado de diagonalización. En Álgebra lineal, sabemos que ciertas matrices de $n \times n$ son diagonalizables, lo que equivale a decir que existe una base de $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores. Y, por supuesto, otras matrices no lo son, razón por la cual todos tuvimos que aprender a calcular la forma de Jordan. Pero hay un caso especial en el que podemos asegurar que una matriz A es diagonalizable y, más aún, que existe una base de autovectores que además es *ortonormal*: cuando A es simétrica, lo que en términos del producto interno de $\mathbb{R}^n$ equivale a decir

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad \forall\, x, y.^2$$

Esta observación empieza a dar sentido a nuestro problema $Lu = \lambda u$ cuando pensamos en el producto interno de funciones dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_0^T u(t)v(t)\, dt.$$

Notemos, en efecto, que si consideramos solo aquellas funciones que cumplen la condición de Dirichlet, entonces L resulta simétrico (o *autoadjunto*) para este producto. Alcanza con observar que

$$\langle Lu, v\rangle = \int_0^T [-u''(t)v(t) + q(t)u(t)v(t)]\, dt = \int_0^T [u'(t)v'(t) + q(t)u(t)v(t)]\, dt.$$

Es claro que en el último paso integramos por partes y usamos la condición $u(0) = u(T) = 0$. Lo mismo ocurre cuando intercambiamos los roles de u y v, lo que prueba que $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$.

Esta integración por partes ayuda, quizás, a empezar a entender por qué es habitual escribir poner como primer término del operador $-u''$, en vez de u''. Pero además explica el hecho de que no hayamos puesto un término de primer orden en el problema, ya que se pierde la simetría:

$$\int_0^T a(t)u'(t)v(t)\, dt = -\int_0^T a(t)u(t)v'(t)\, dt.$$

[2] Cabe aclarar que estamos identificando A con la transformación lineal inducida, para evitar discusiones acerca de escribir los vectores como fila o como columna. En forma matricial, la igualdad anterior debería escribirse $xAy^T = yAx^T$ o algo parecido (dependiendo de quién haya ganado la discusión).

Existe, sin embargo, un truco para transformar un problema de la forma

$$-u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = c(t)$$

en otro cuyo operador asociado sea autoadjunto: se puede multiplicar la ecuación por $p(t) := e^{\int_0^t a(s)\,ds}$, de modo que queda

$$(-pu')'(t) + q(t)u(t) = C(t),$$

donde $q(t) = p(t)b(t)$ y $C(t) = p(t)c(t)$. Se suele decir que el operador (simétrico) $Lu := (-pu')' + qu$ está *en forma de divergencia*, nombre que proviene del contexto más general de ecuaciones en derivadas parciales.[3] Por simplicidad, vamos a continuar con $p = 1$, pero los resultados que veremos valen también para el caso general con $p > 0$.

La propia simetría es la que nos dice que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales: en efecto, si $Lu_j = \lambda_j u_j$ resulta:

$$\lambda_1\langle u_1, u_2\rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \langle Lu_1, u_2\rangle\langle u_1, Lu_2\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \lambda_2\langle u_1, u_2\rangle.$$

Esto lleva a sospechar que la diagonalización es posible también aquí, en este mundo de dimensión infinita de los espacios de funciones. Por supuesto, no diremos aquí quiénes son exactamente los espacios involucrados pero, para fijar ideas, vamos a mencionar de una vez el resultado que, en este contexto, dice que existe una sucesión de autovalores

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \to +\infty$$

cuyas correspondientes autofunciones u_j forman una base ortonormal de $L^2(0,T)$. Sin entrar en detalles, esto quiere decir que cualquier elemento $f \in L^2(0,T)$ se escribe en la forma

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k,$$

donde los coeficientes f_j son simplemente el producto $\langle f, u_j\rangle$. Cabe aclarar que la convergencia de la serie es en el sentido de L^2 y, además, la 'base' no es una base desde el punto de vista algebraico, ya que la serie no es, en general, una combinación lineal (es decir, finita). Se trata de las famosas series de Fourier, que aparecen de manera natural (y ciertamente bella) a partir de esta teoría. Por ejemplo, para el problema con $q = 0$

$$-u''(t) = \lambda u(t), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

es fácil calcular explícitamente los autovalores. En primer lugar, veamos que son todos positivos: para $\lambda = -c^2 < 0$ las soluciones de la ecuación son de la forma

[3] Vale decir, operadores de la pinta $Lu(x) = -\mathrm{div}[p(x)\nabla u(x)] + q(x)u(x)$. Claro que en $\mathbb{R}^n$ la integración por partes no es otra que el teorema de la divergencia, del que se deducen las fórmulas de Green. Por ejemplo, si u y v se anulan en el borde de una región R, entonces $\int_R \mathrm{div}(p\nabla u)v = -\int_R p\nabla u\nabla v = \int_R \mathrm{div}(p\nabla v)u$.

$u(t) = ae^{ct} + be^{-ct}$ y, usando las condiciones de borde, se ve que $a = b = 0$. Lo mismo ocurre si $\lambda = 0$: la solución general u es una recta, pero como se anula en los extremos resulta $u \equiv 0$. Sea entonces $\lambda > 0$ y escribamos la solución general en la forma

$$u(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}t).$$

La condición $u(0) = 0$ dice ahora que $a = 0$. Finalmente, la condición $u(T) = 0$ dice que $\sqrt{\lambda}T = k\pi$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. En otras palabras, los autovalores son

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$$

y las correspondientes autofunciones (normalizadas) son

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{T}t\right).$$

Por ejemplo, tomando $T = \pi$, para la función $f(t) = t$, obtenemos la simpática fórmula

$$t = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\mathrm{sen}(kt).$$

Pero, ya que estamos, podemos además recordar aquella versión en dimensión infinita del teorema de Pitágoras, la *identidad de Parseval*, que en este contexto dice: si $f = \sum_k f_k u_k$, entonces

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

En particular, para nuestra $f(t) = t$ se obtiene

$$\frac{\pi^3}{3} = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

de donde se deduce una igualdad famosa:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Observación 2.1 *Si alguien creyó ver alguna relación entre el* 6 *de la igualdad anterior y el* 12 *de la desigualdad de Sobolev que se menciona en la Observación 1.2, no está alucinando. La fórmula se puede probar a partir de lo anterior. Aunque es más cómodo emplear la serie clásica de Fourier con senos y cosenos, que se deduce de las condiciones periódicas. O, más cómodo todavía, la forma compleja:*

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e_k(t),$$

donde

$$e_k(t) = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{T}t}}{\sqrt{T}}, \qquad f_k = \int_0^T f(t)\overline{e_k(t)}\,dt = \int_0^T f(t)e_{-k}(t)\,dt \in \mathbb{C}.$$

Dejando de lado los detalles técnicos, la idea es muy sencilla: si u es T periódica de promedio 0 y de clase C^1, podemos escribir su derivada en serie de Fourier, donde el término correspondiente a $k = 0$ es nulo, porque u' tiene promedio 0 (periodicidad, que le dicen). Así tenemos

$$u'(t) = \sum_{k\neq 0} v_k e_k(t), \qquad \|u'\|_{L^2}^2 = \sum_{k\neq 0} |v_k|^2.$$

Como u también tiene promedio 0, resulta:

$$u(t) = \frac{T}{2\pi i}\sum_{k\neq 0} \frac{v_k}{k} e_k(t).$$

El último paso puede parecer algo polémico ya que, si bien es cierto que $\frac{Te_k}{2k\pi i}$ es primitiva de e_k, ¿qué es eso de integrar término a término? Pero, para tranquilidad del lector, cabe decir que integrar siempre es mejor que derivar: concretamente, si una sucesión S_N (v. g. la de sumas parciales) converge a S en el sentido de L^2, entonces es inmediato ver sus respectivas primitivas $\int_0^t S_N(\xi)\,d\xi$ convergen a $\int_0^t S(\xi)\,d\xi$ en el sentido de L^2. En realidad lo hacen uniformemente:

$$\left|\int_0^t (S_N - S)\right| \leq \int_0^t |S_N - S| \leq T^{1/2}\|S_N - S\|_{L^2}.$$

Pero ahora solo resta observar que $|e_k(t)| = \frac{1}{\sqrt{T}}$ y gracias al multifacético lema de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|u(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{2\pi}\sum_{k\neq 0}\left|\frac{v_k}{k}\right| \leq \frac{\sqrt{T}}{2\pi}\sqrt{\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}\,\|u'\|_{L^2} = \sqrt{\frac{T}{12}}\|u'\|_{L^2}.$$

De modo similar se puede ver (empleando por ejemplo la serie de cosenos, proveniente del problema de Neumann) que si u es de clase C^1 y verifica $u(0) = u(T) = 0$, entonces

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{\frac{T}{3}}\|u'\|_{L^2}.$$

Los autovalores también juegan un rol crucial en otras desigualdades conocidas. Por ejemplo, la de Poincaré,

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 |u'\|_{L^2}^2$$

para toda u que se anula en el borde y y la de Wirtinger:

$$\|u - \overline{u}\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \|u'\|_{L^2}^2$$

para toda función T-periódica u. Como veremos en otro apunte, no por casualidad la constante (que es óptima) es el inverso del primer autovalor del problema de Dirichlet y periódico respectivamente.

Debemos reconocer, a esta altura, que nos fuimos un poco de tema. Pero el objetivo es comprobar que en el caso general vale lo mismo que ocurre para $q = 0$: las soluciones que se anulan en 0, a medida λ crece, se van comprimiendo hacia la izquierda y para cierto conjunto discreto de valores de λ (¡los autovalores!) se anulan también en T. La primera autofunción no se anula en $(0, T)$ pero, a medida que van apareciendo nuevos autovalores las respectivas autofunciones van agregando cada vez un nuevo cero.

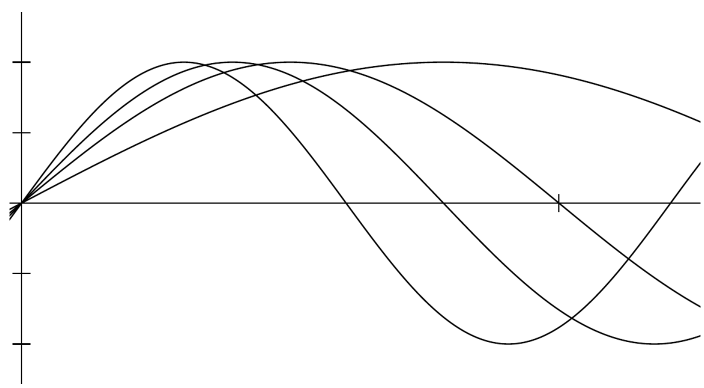

Figure 3: Gráfico de $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}t)$ para distintos valores de λ.

Lo anterior justifica plantear el problema mediante el método de shooting, donde el parámetro no está ahora en los valores iniciales sino que precisamente es λ. Como las autofunciones forman un subespacio, podemos fijar también el valor de la derivada en 0, por ejemplo

$$\begin{gathered} -u''(t) + q(t)u(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = 0,\, u'(0) = 1. \end{gathered}$$

La aplicación $\phi(\lambda) := u_\lambda(T)$ está bien definida y es continua: buscamos, entonces, los valores de λ tales que $\phi(\lambda) = 0$.

No es cierto, en general, que el primer autovalor λ_1 resulte positivo: dependerá de quién sea q. Pero lo que es claro es que los autovalores no pueden ser muy negativos: por ejemplo, si integramos la ecuación resulta

$$u'(t) = 1 + \int_0^t (q(t) - \lambda)u(t)\, dt.$$

De este modo, u_λ es creciente cuando $\lambda < q_{\min}$ y, en consecuencia, $u_\lambda(T) > 0$.

Consideremos ahora la función que cuenta los ceros de u_λ, es decir:

$$N(\lambda) := \#\{\text{ceros de } u_\lambda \text{ en el intervalo } (0,T)\}.$$

Conviene observar, en primer lugar, que al tratarse de una ecuación lineal, la unicidad implica que todos los ceros de una solución son simples y, en particular, que $N(\lambda)$ es siempre finito. Vamos a analizar el comportamiento de N en sucesivos pasos:

1. Si λ no es un autovalor (es decir, $u_\lambda(T) \neq 0$), entonces N es constante en un entorno de λ. Esto se explica por la dependencia continua, como se ve en la figura 4: para ganar o perder ceros moviendo λ de manera continua y manteniendo el extremo final lejos del eje horizontal, en algún momento deberíamos encontrarnos con un cero doble. Queda como ejercicio formalizar este argumento.

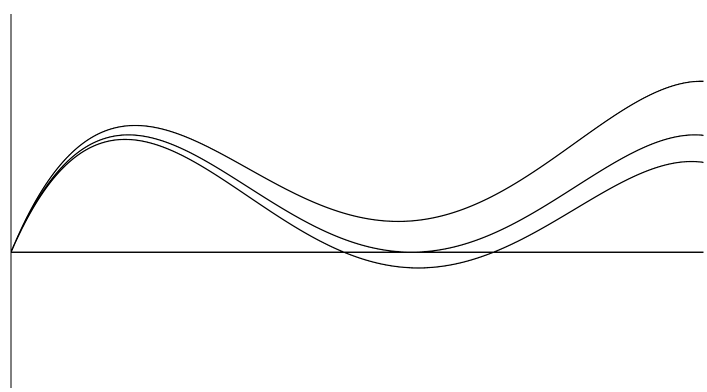

Figure 4: La cantidad de ceros no varía

2. Si λ es un autovalor, entonces $N(\lambda^+) = N(\lambda) + 1$. En conclusión, la función N es continua a izquierda y aumenta en una unidad cada vez que pasamos por un autovalor. Para demostrar esto, observemos en primer lugar que, por las mismas razones de antes, la cantidad de ceros no podría aumentar de un saque en dos o más unidades si el valor de λ aumenta un poquito. Pero veamos que necesariamente se agrega uno; para esto, resulta de utilidad la siguiente versión simple del llamado *principio de comparación de Sturm*: Sean $u, v \neq 0$ tales que

$$-u''(t) = r(t)u(t), \qquad -v''(t) = \hat{r}(t)v(t),$$

con $r, \hat{r}$ continuas tales que $\hat{r}(t) \geq r(t)$. Si a y b son dos ceros consecutivos de u, entonces v se anula en (a, b), o bien $r = \hat{r}$ y las funciones u, v son linealmente dependientes.

En efecto, si v no se anula en (a,b), podemos suponer por ejemplo que $u,v>0$ en (a,b). Es claro que además vale $u'(a)>0>u'(b)$. Entonces

$$\int_a^b u'(t)v'(t)\,dt - u'v|_a^b = -\int_a^b u''(t)v(t)\,dt = \int_a^b r(t)u(t)v(t)\,dt$$

$$\leq \int_a^b \hat{r}(t)u(t)v(t)\,dt = -\int_a^b u(t)v''(t)\,dt = \int_a^b u'(t)v'(t)\,dt - uv'|_a^b$$

y luego

$$u'(a)v(a) - u'(b)v(b) \leq u(a)v'(a) - u(b)v'(b) = 0.$$

Esto implica que $v(a)=v(b)=0$. Pero, además, si $r\neq\hat{r}$ entonces la desigualdad anterior sería estricta, lo que es absurdo. Conclusión: $r=\hat{r}$, y -como decían en *Las manos mágicas*, hace un par de añitos- el resto depende de usted. O, mejor dicho: de Wronski.

Aplicando este resultado a nuestro problema, para $\hat{\lambda}>\lambda$ se deduce, tomando $r(t)=\lambda-q(t)$ y $\hat{r}(t)=\hat{\lambda}-q(t)$ que entre dos ceros consecutivos de u_λ hay al menos uno de $u_{\hat{\lambda}}$ (en rigor, exactamente uno cuando $\hat{\lambda}$ está cerca de λ). Como $u_\lambda(T)=0$, esto prueba que $N(\hat{\lambda})>N(\lambda)$: para cada cero de u_λ que va apareciendo tenemos, un poquito antes, un cero de $u_{\hat{\lambda}}$. Hasta que, como un gol en el último minuto, entre el último cero de u_λ y T aparece un nuevo cero de $u_{\hat{\lambda}}$.

3. $N(\lambda)\to\infty$ para $\lambda\to+\infty$.

   Para demostrar esto, observemos que, si λ es grande, entonces los ceros y los puntos críticos de la correspondiente solución u se alternan. El teorema de Rolle dice que entre dos ceros tiene que haber un punto crítico. Pero, además, para $\lambda>q_{\max}$ se sabe que u'' tiene el signo opuesto al de u, ya que

$$-u''(t) = (\lambda - q(t))u(t).$$

   En consecuencia, un punto crítico t_0 es un máximo si $u(t_0)>0$ y un mínimo si $u(t_0)<0$. Esto implica que no se puede ir desde un punto crítico al siguiente sin pasar por un cero. En definitiva, podemos considerar el conjunto de todos los ceros y puntos críticos en $[0,T]$ y, por comodidad, agregarle el valor final del intervalo. De esta manera, tenemos un conjunto de valores

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$$

   y la idea es probar que la distancia entre dos elementos consecutivos tiende a 0 a medida que λ crece. Vamos a ver que esto ocurre con los dos primeros, es decir, que $t_1(\lambda)\to 0$; el razonamiento general es análogo.

   Empecemos reescribiendo la ecuación en la forma

$$u''(t) + \lambda u(t) = q(t)u(t).$$

Multiplicando por $u'(t)$, resulta

$$u''(t)u'(t) + \lambda u(t)u'(t) = q(t)u(t)u'(t),$$

e integrando

$$u'(t)^2 + \lambda u(t)^2 = 1 + 2\int_0^t q(s)u(s)u'(s)\,ds.$$

Al cabo de tantos gerundios, obtuvimos la desigualdad

$$u'(t)^2 + \lambda u(t)^2 \leq 1 + 2C\int_0^t |u(s)u'(s)|\,ds.$$

donde $C = \|q\|_\infty$. Ahora podemos usar el pequeño gran truco que dice, para $x, y > 0$:

$$2xy = 2\sqrt{C}x\frac{y}{\sqrt{C}} \leq Cx^2 + \frac{y^2}{C}.$$

Luego

$$u'(t)^2 + \lambda u(t)^2 \leq 1 + \int_0^t [C^2u(s)^2 + u'(s)^2]\,ds.$$

En consecuencia, para $\lambda \geq C^2$, el lema de Gronwall (¡vaya si lo estamos amortizando!) implica que

$$u'(t)^2 + \lambda u(t)^2 \leq e^t \leq e^T.$$

Esto es muy bueno, porque entonces ya sabemos que u' y u se mantienen acotadas; más aún, $\|u\|_\infty$ es del orden de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. En particular, u y u' no pueden ser demasiado chicas al mismo tiempo, porque

$$u'(t)^2 + \lambda u(t)^2 \geq 1 - 2C\int_0^t |u(s)u'(s)|\,ds \geq 1 - \frac{A}{\sqrt{\lambda}}$$

para cierta constante A. En particular, en t_1 se alcanza un máximo y vale

$$u(t_1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Esta última notación, la famosa 'o chica' simplemente significa aquí que se trata de un término que se va a cero más rápido que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ cuando $\lambda \to +\infty$. Específicamente, en este caso va a ser algo del orden de $\lambda^{-3/4}$. El asunto es que podemos fijar $t^* \in (0, t_1)$ tal que $u(t^*) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ y entonces:

- Para $t \in (0, t^*)$ tenemos que $u(t) < \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ y

$$u'(t)^2 \geq 1 - \frac{A}{\sqrt{\lambda}} - \lambda u(t)^2 \geq \frac{3}{4} - \frac{A}{\sqrt{\lambda}},$$

de modo que si λ es grande vale $u'(t) > \frac{1}{2}$. De esta forma,

$$u(t^*) = \int_0^{t^*} u'(t)\,dt > \frac{t^*}{2},$$

es decir, $t^* < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

- Para $t \in (t^*, t_1)$ vale, cuando $\lambda > q_{\max}$,

$$-u''(t) = (\lambda - q(t))u(t) > \frac{\lambda - q(t)}{2\sqrt{\lambda}}$$

y si $\lambda \gg 0$ podemos concluir que $-u''(t) > \frac{\sqrt{\lambda}}{3}$. Luego

$$u'(t) = -\int_t^{t_1} u''(s)\,ds > \frac{\sqrt{\lambda}}{3}(t_1 - t),$$

de donde

$$u(t_1) - u(t^*) = \int_{t^*}^{t_1} u'(t)\,dt > \frac{\sqrt{\lambda}}{3}\int_{t^*}^{t_1} (t_1 - t)\,dt = \frac{\sqrt{\lambda}}{6}(t_1 - t^*)^2.$$

Esto muestra que $t_1 - t^*$ es también del orden de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ y en consecuencia también t_1.

Observación 2.2 *La cuenta anterior nos dice, muy a ojo, que la distancia entre los ceros consecutivos de una autofunción es 'del orden de'* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$*, de modo que la cantidad de ceros es 'del orden de'* $\sqrt{\lambda}$*. Esta cuenta se puede refinar mucho más, pero al menos podemos ver que funciona razonablemente bien en el caso* $q = 0$*: el* k*-ésimo autovalor es* $\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$ *y la correspondiente autofunción función es* $\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$*, que tiene* $k-1$ *ceros.*

References

[1]