Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 2 - 2/9 (versión preliminar)

1 Como veníamos diciendo...

En la clase previa introdujimos el método de shooting y probamos, en primer lugar, que el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

tiene al menos una solución cuando f es buena y acotada. Pero eso es pedir que sea *demasiado* buena; por eso, a continuación mostramos que también hay solución (en este caso única) cuando f es creciente en la variable u. No contentos con eso (o tal vez sí, pero con ganas de estar todavía más contentos) dijimos que hay otra forma de verlo, recurriendo a las cotas a priori. Y así terminamos la clase, generando sin duda una enorme expectativa (?) entre la audiencia. Recordemos la situación: tras algunas cuentas, logramos probar que una solución del problema, en caso de existir, necesariamente satisface

$$\|u\|_\infty \leq R$$

donde R es un valor independiente de u. Pero el detalle crucial es que para obtener esa cota empleamos únicamente dos cosas:

1. La monotonía de f.
2. El valor de la integral $\int_0^T |f(t, 0)|\, dt$.

Esto quiere decir que vamos a obtener la misma cota si recurrimos otra vez al truncamiento, por ejemplo, reemplazando f por otra función $\hat{f}$ que también sea monótona y tome los mismos valores para $u = 0$. Pero, ya que estamos, podemos además pedir que $\hat{f}$ sea acotada y que por el camino no perdamos lipschitzianidad, si el lector permite una expresión tan pomposa. Una elección obvia es $\hat{f}(t, u) = f(t, T_R(u))$ donde

$$T_R(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq R \\ R & \text{si } u \geq R \\ -R & \text{si } u \leq -R, \end{cases}$$

que cumple todo lo pedido. Como $\hat{f}$ es acotada, el problema de Dirichlet para la ecuación $u''(t) = \hat{f}(t, u(t))$ admite una solución $u(t)$; como $\hat{f}$ es creciente en

u y además $\hat{f}(t,0) = f(t,0)$, entonces $\|u\|_\infty \leq R$. De esta forma, haciéndonos eco de una célebre frase pronunciada por un antiguo cursante, podemos ver que "el truncamiento no trunca" y la tal $u(t)$ es solución del problema original.

Para que no se corte (o, si se prefiere, que no se trunque) vamos a terminar esta parte con otro ejemplo clásico, una versión elemental de la llamada *condición de Hartman*. Específicamente, para el mismo problema de antes supondremos ahora que f satisface

$$f(t,R) > 0 > f(t,-R) \tag{1}$$

para todo $t \in [0,T]$. Observemos que se trata de un caso especial del llamado *método de super y subsoluciones* (ver ejercicio xxxxx), al que volveremos más adelante: en efecto, si definimos las funciones $\beta(t) \equiv R$ y $\alpha(t) \equiv -R$, entonces se cumple trivialmente que

$$\beta''(t) < f(t,\beta(t)), \qquad \alpha''(t) > f(t,\alpha(t))$$

y

$$\beta(0) > 0 > \alpha(0), \qquad \beta(T) > 0 > \alpha(T).$$

El nombre respectivo de super y sub para β y α puede parecer un misterio a la luz de las primeras desigualdades aunque, como veremos, tiene una explicación bastante razonable.

Pero no nos distraigamos: se trata de probar que hay solución bajo la condición (1). Es muy tentadora, otra vez, la idea de truncar (a la larga, uno se envicia). Pero para que esto funcione bien, tendríamos que definir $\hat{f}$ como antes y ver, una vez más, que "el truncamiento no trunca" (*op. cit.*). Pero el argumento ahora es diferente: si u es una solución para el problema truncado, es claro que $u(0)$ y $u(T)$ se encuentran entre $-R$ y R. Entonces, si (traicionando a los clásicos) el truncamiento no truncase, tendría que haber un valor $t_0 \in (0,T)$ tal que, por ejemplo, $u(t_0) > R$. En particular, se lo puede elegir de manera tal que la función $u(t) - R$ alcance un máximo en t_0; de esta forma,

$$0 \geq u''(t_0) = \hat{f}(t_0, u(t_0)) = f(t_0, R) > 0,$$

lo que es absurdo. Lo mismo ocurre si suponemos $u \not\geq -R$; en consecuencia $-R \leq u(t) \leq R$ y luego *E.T.N.T.*

2 Operador de Poincaré

Veamos ahora otro de los problemas típicos para los cuales se puede aplicar un argumento del tipo shooting, todavía unidimensional: el problema periódico

$$u'(t) = f(t,u(t)), \qquad u(0) = u(T). \tag{2}$$

Como en el problema anterior, la idea consiste en resolver la ecuación con un dato inicial, en este caso $u(0) = u_0$ y definir el operador $P(u_0) = u(T)$, donde

$u(t)$ es la solución correspondiente a u_0. Otra vez, no sabemos con exactitud cuál es el dominio de P, pero sí sabemos que es abierto y que P resulta continua. Por otra parte, acá se cumple de manera gratuita una propiedad que antes vimos en el caso monótono: las soluciones no se cruzan. En efecto, como el problema es de primer orden, este hecho es consecuencia inmediata de la unicidad. Esto permite probar, además, que el dominio de P es un intervalo: si las soluciones correspondiente a dos valores inciales $u_1 < u_2$ están definidas hasta $t = T$, entonces lo mismo ocurre para cualquier valor inicial en el intervalo (u_1, u_2).

Sin embargo, a diferencia del anterior problema de Dirichlet, ahora no se trata de encontrar un cero de la función P sino un valor u_0 tal que $P(u_0) = u_0$. En otras palabras, en nuestro repertorio de teoremas entrañables tendremos que reemplazar a Bolzano por otro que, en realidad, es equivalente: la versión unidimensional del teorema de Brouwer:

Teorema 2.1 *Sea $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $P([a, b]) \subset [a, b]$, entonces P tiene al menos un punto fijo.*

¿Por qué dijimos que los dos teoremas son equivalentes? Porque cada uno se deduce del otro: por ejemplo, para demostrar el último enunciado basta definir $g(x) := x - P(x)$, de modo que $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Recíprocamente, dada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua que cambia de signo, asumiendo que vale Brouwer podemos definir una cierta P... con ayuda del lector. Dicho sea de paso, también es fácil verificar que cualquiera de los dos teoremas (y muchas otras variantes) es equivalente también al axioma de completitud de los números reales.

Provistos de nuestra flamante herramienta, vamos a emplearla para resolver algún caso fácil de (2): por ejemplo, supongamos que para cierto $R > 0$ vale

$$f(t, R) < 0 < f(t, -R) \qquad \forall\, t \in [0, T]. \tag{3}$$

La idea es muy sencilla: basta observar que si $u(t) = R$ para algún t, entonces vale $u'(t) < 0$ y, del mismo modo, si $u(t) = -R$ entonces $u'(t) > 0$. Esto muestra que una solución que comienza en un valor u_0 en el intervalo $(-R, R)$ se va a mantener siempre allí; más aún, si comienza en el borde (es decir, $u_0 = R$ o $u_0 = -R$), se mete enseguida en $(-R, R)$ y no vuelve a salir. En particular, P está definida en $[-R, R]$ y vale $P([-R, R]) \subset [-R, R]$, así que tiene un punto fijo.

A esta altura ya podemos decir que el último resultado tan sencillo no se cuenta entre nuestros logros más notables (aunque sí entre los más resonantes, ya que es un problema periódico). Pero se trata de un modesto ejemplo que nos va a permitir hacer unas cuantas observaciones adicionales.

En primer lugar, cabe efectuar una pequeña digresión sobre un tema al que hace un buen rato le tenemos ganas, tanto en los ejemplos anteriores como en este: ¿qué pasa si la f no es tan buena como pretendemos? No es que tengamos nada en su contra, claro, pero hasta ahora le hemos venimos pidiendo encarecidamente que sea Lipschitz. ¿Qué ocurre si solo quiere ser continua? En tal caso, la solución del problema de valores iniciales no es necesariamente única y el operador de Poincaré (o el de shooting) no está bien definido.

Antes de entrar en estado de shock, conviene repasar lo que hicimos en el último ejemplo: con ayuda de la única condición (3), probamos que hay alguna solución periódica. En realidad, podría haber muchas, pero lo que nos interesa especialmente es que (3) nos garantiza que hay al menos una solución que se mantiene siempre en el intervalo $[-R, R]$ (en rigor, en $(-R, R)$, pero eso no interesa ahora). Esto puede darnos una buena idea para el caso en que f cumple (3) pero solamente es continua: a no desesperar, pues podemos tomar una función suave (nos conformamos con que sea Lipschitz) tan cerca de f como tengamos ganas, de manera que siga cumpliendo (3). Si alguien nos pregunta por qué podemos hacerlo, le respondemos: por Stone-Weierstrass. Y si alguien nos pregunta para qué, le decimos: para tener una solución *aproximada* del problema: no cualquiera, sino una que vive en el intervalo $[-R, R]$. Como el lector imaginará, de eso se trata, de elegir una sucesión f_n de funciones suaves que converge uniformemente a f por ejemplo en $[0, T] \times [-R, R]$ y soluciones x_n para cada uno de los respectivos problemas, tales que $u_n(t) \in [-R, R]$ para todo t. En particular, la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en el espacio $C([0, T])$ y, más aún,

$$|u_n'(t)| = |f_n(t, u_n(t))| \leq C$$

para cierta constante n independiente de n y de t. Por Arzelá-Ascoli, $\{u_n\}$ tiene alguna subsucesión $\{u_{n_j}\}$ que converge uniformemente a cierta x. Tomando límite en la igualdad

$$u_{n_j}(t) = u_{n_j}(0) + \int_0^t f_{n_j}(s, u_{n_j}(s))\, ds$$

se verifica (ejercicio) que u es una solución del problema original. Y, obviamente, $-R \leq u(t) \leq R$ para todo t... aunque a esta altura, ¿qué más da?

Volvamos ahora al mundo de las funciones suaves y veamos lo que pasa ahora en la situación opuesta:

$$f(t, R) > 0 > f(t, -R) \qquad \forall\, t \in [0, T]. \tag{4}$$

¿Podremos repetir el argumento de antes para hallar soluciones? El problema es que si ahora suponemos $x(t) = \pm R$ entonces $x'(t) > 0$ y $x'(t) < 0$ respectivamente; en otras palabras, la solución es "expulsada" (para siempre) de la región $[-R, R]$, con el agregado adicional de que, nuevamente, nos topamos otra vez con el problema de que no tiene por qué no llegar hasta T. Apoyándonos en nuestros éxitos recientes, podríamos pensar que no hay nada como un buen truncamiento, pero: ¡atención! Hay que hacerlo con cierta delicadeza, no es cuestión de ponerse a truncar a troche y moche. Por ejemplo, si definimos como hicimos antes

$$\hat{P}(u) := \begin{cases} P(u) & \text{si } |u(t)| < R \text{ para todo } t \\ R & \text{si } u(t) = R \text{ para algún } t \\ -R & \text{si } u(t) = -R \text{ para algún } t, \end{cases}$$

entonces es cierto que $\hat{P}$ es continua (¿por qué?); además, $\hat{P}([-R, R]) \subset [-R, R]$ y entonces tiene algún punto fijo. Pero podríamos tener la pésima suerte de que los únicos puntos fijos fueran R y $-R$, que claramente no son puntos fijos de P. Pero, ¿qué tal si truncamos un poquito más allá del intervalo? Por ejemplo,

$$\hat{P}(u) := \begin{cases} P(u) & \text{si } |u(t)| < R+\varepsilon \text{ para todo } t \\ R+\varepsilon & \text{si } u(t) = R+\varepsilon \text{ para algún } t \\ -R-\varepsilon & \text{si } u(t) = -R-\varepsilon \text{ para algún } t, \end{cases}$$

Esto parece mejor y define una función continua si ε es chico (¿por qué?). Aunque ahora tenemos el problema de que $\hat{P}([-R,R])$ puede no estar contenido en $[-R,R]$ y ¡chau, Brouwer! Sin embargo, podemos intentar con una versión "expansiva" del teorema:

Teorema 2.2 *Sea $Q : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Si $[a,b] \subset Q([a,b])$, entonces Q tiene al menos un punto fijo.*

Y esto se explica por el mismo Bolzano de antes: si $g(x) = x - Q(x)$, entonces tomamos x_a, x_b tales que $Q(x_a) = a, Q(x_b) = b$ y vale $g(x_a) \leq 0 \leq g(x_b)$. En el caso anterior tenemos, para ε chico, que $\hat{P}([-R,R]) = [-R-\varepsilon, R+\varepsilon] \supset [-R,R]$. Luego, $\hat{P}$ tiene un punto fijo que resulta (¿por qué?) punto fijo de P.

Pero todas estas volteretas no eran (con todo respeto) más que un auténtico cazabobos, ya que había una opción mucho más sencilla: ¿qué tal si definimos $v(t) = u(-t)$? En ese caso el problema se transforma en

$$v'(t) = -u'(-t) = -f(-t, u(-t)) = -f(-t, v(t)).$$

Es decir, tenemos ahora un problema

$$v'(t) = g(t, v(t))$$

en el intervalo $[-T, 0]$, con $g(t,v) = -f(-t,v)$, que cumple

$$g(t,R) < 0 < g(t,-R)$$

para todo t. Por supuesto, la intención no era gastar una pequeña broma al lector sino aprovechar la distracción para aprender una nueva versión del teorema de Brouwer.

Una consecuencia inmediata del ejemplo anterior es el siguiente resultado para los problemas no resonantes

$$u'(t) \pm u(t) = g(t, u(t))$$

Si g es acotada, entonces el problema periódico tiene solución: basta tomar $f(t,u) = \mp u + g(t,u)$, que para $R \gg 0$, verifica (3) o (4), respectivamente.

3 Super y subsoluciones - Primera versión

Consideremos como antes el problema periódico (2), con f suave. Supongamos que existen funciones $\alpha \leq \beta$ que verifican

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), \qquad \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$$

$$\beta(0) = \beta(T), \qquad \alpha(0) = \alpha(T).$$

Observemos que si β y α son respectivamente $\pm R$, entonces la condición es casi igual a (3), con la única salvedad de que ahora tenemos desigualdades no estrictas. Justamente por ese detalle, vamos a usar los resultados ya obtenidos para adaptarlos a este nuevo contexto. La idea es en principio la misma, truncando ahora entre α y β, aunque el argumento es un poco más sutil.

Teorema 3.1 *En la situación anterior, (2) tiene al menos una solución u tal que $\alpha \leq u \leq \beta$.*

<u>*Demostración*</u>: Definimos $T_{\alpha,\beta}$ como el truncamiento entre α y β, es decir:

$$T_{\alpha,\beta}(t,u) = \begin{cases} u(t) & \text{si } \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \\ \beta(t) & \text{si } u(t) > \beta(t) \\ \alpha(t) & \text{si } u(t) < \alpha(t). \end{cases}$$

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$u'(t) + u(t) = f(t, T_{\alpha,\beta}(t, u(t))) + T_{\alpha,\beta}(t, u(t)).$$

Como el término del lado derecho es acotado, sabemos ya que existe una solución u del problema (2); luego, basta ver que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ para todo t. Supongamos por ejemplo que $u \not\leq \beta$ y, como antes, podemos tomar t_0 tal que $u - \beta$ alcanza su máximo absoluto en t_0, con $u(t_0) - \beta(t_0) > 0$. Si $t_0 \in (0, T)$, entonces la derivada de $u - \beta$ se anula en t_0. Pero además $T_{\alpha,\beta}(t_0, u(t_0)) = \beta(t_0)$ y luego

$$u'(t_0) = f(t_0, \beta(t_0)) + \beta(t_0) - u(t_0) < \beta'(t_0),$$

lo que es absurdo. Por otra parte, si $t_0 = 0$, entonces $u - \beta$ también alcanza su máximo en T, con $(u - \beta)'(T) \geq 0$ y, como antes,

$$u'(T) = f(T, \beta(T)) + \beta(T) - u(T) < \beta'(T),$$

absurdo. De manera análoga se prueba que $u \geq \alpha$.

$\square$

A diferencia del problema de segundo orden, que más adelante veremos con detalle, en este caso los roles de α y β se pueden invertir, es decir:

$$\beta'(t) \leq f(t, \beta(t)), \qquad \alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t))$$

$$\beta(0) = \beta(T), \qquad \alpha(0) = \alpha(T).$$

Queda como ejercicio demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.2 *En la situación anterior, (2) tiene al menos una solución u tal que $\alpha \leq u \leq \beta$.*

4 El caso $u'(t) = f(u(t)) + p(t)$

Vamos a ver algunos resultados para el problema

$$u'(t) = f(u(t)) + p(t), \qquad u(0) = u(T) \tag{5}$$

con f localmente Lipschitz y p continua. Muchas de las consideraciones van a servir más adelante para los llamados *sistemas gradientes*. En primer lugar, hay una condición necesaria bastante obvia para la existencia de solución: integrando ambos lados de la ecuación resulta

$$0 = \int_0^T f(u(t))\,dt + \int_0^T p(t)\,dt$$

o, si se prefiere

$$-\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T f(u(t))\,dt,$$

donde $\overline{p} := \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$ es el promedio de la función p. Por el teorema de valor medio esto dice, en particular, que $-\overline{p} = f(u(t_0))$ para algún t_0 y luego $\overline{p} \in \mathrm{Im}(f)$. Sin embargo, esta condición no es suficiente: por ejemplo, la ecuación

$$x'(t) = x(t)^2 + p(t)$$

con p una función T-periódica no constante de promedio 0 no tiene soluciones T-periódicas: si uno integra la ecuación queda

$$\int_0^T x(t)^2\,dt = 0,$$

de donde $x \equiv 0$, lo que es absurdo.

Sin embargo, en algunos casos es fácil probar que hay soluciones. Veamos un primer ejemplo, el caso en que $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$ respectivamente o al revés, $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to \mp\infty$. Esto se puede decir de maneras más elegantes, por ejemplo, que $|f(x)| \to +\infty$ si $|x| \to +\infty$ y $f(x)f(-x)$ para $x \gg 0$. Para fijar ideas, el ejemplo típico sería el de un polinomio de grado impar. Pero ni bien lo pensamos un poco vemos que este caso es una papa (expresión que no suele escucharse desde la época en que jugábamos al *Gorilla*): como p es acotada, si elegimos R suficientemente grande resulta

$$f(R) + p(t) > 0 > f(-R) + p(t)$$

o bien

$$f(R) + p(t) < 0 < f(-R) + p(t)$$

que corresponde a las situaciones que vimos antes.

Pregunta fatídica*: ¿qué ocurre si p no es continua, por ejemplo $p \in L^2(0,T)$? No se trataría de una solución en el sentido 'clasico', aunque también se puede ver que siempre existe alguna.

Un ejemplo algo más complicado es cuando f tiende a la misma clase de infinito de los dos lados, como ocurre con un polinomio no constante de grado par. Ya vimos que puede no haber soluciones; más concretamente, en este caso la imagen de f es de la forma $[a, +\infty)$ o $(-\infty, a]$, así que la condición necesaria es que $-\overline{p}$ se encuentre allí. Para analizar mejor el problema, conviene escribir $p(t) = p_0(t) - s$, con p_0 de promedio 0 y $s \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f(x) \to +\infty$ para $|x| \to +\infty$, entonces no hay solución si $s < \min f$. Pero es posible obtener un resultado mucho más preciso, del tipo de los llamados *teoremas de Ambrosetti-Prodi*.

Existe s^* tal que el problema:

1. No tiene solución para $s < s^*$.
2. Tiene al menos una solución para $s = s^*$.
3. Tiene al menos dos soluciones para $s > s^*$.

Y esto se demuestra... en la próxima clase.

References

[1]