Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 1 - 31/8 (versión preliminar)

1 Introducción

En cualquier curso inicial de ecuaciones diferenciales, uno de los primeros resultados que uno aprende es aquel que dice que el problema

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

tiene una única solución, definida en un entorno apropiado de t_0. Para esto, claro, hay que suponer que F es bastante buena. Típicamente se asume que F está definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pero, por simplicidad, supondremos directamente que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; además, pediremos que sea continua y localmente Lipschitz en la variable X. Todos recordarán haber probado la existencia de dicha solución (la unicidad es otro cantar), en ese momento algo a los tumbos, por medio del *método de Picard*: a partir del dato inicial X_0, se define de manera inductiva una sucesión de funciones dada por

$$X_{n+1}(t) := X_0 + \int_0^t F(s, X_n(s))\, ds.$$

Eligiendo δ suficientemente pequeño, se ve que la sucesión está bien definida para $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y converge uniformemente a cierta función X, que es solución del problema. En efecto, tomando límte a ambos lados de la igualdad, se verifica que

$$X(t) := X_0 + \int_0^t F(s, X(s))\, ds.$$

Y aquí comienza nuestra historia: lo que tenemos ahora no es otra cosa que un *punto fijo* del operador dado por

$$P(X) := X_0 + \int_0^t F(s, X(s))\, ds,$$

definido en algún espacio funcional adecuado. Por eso, no es casualidad que las iteraciones definidas por Picard en las últimas décadas del siglo XIX sean las mismas que alumbraron (con sus pálidos reflejos) el resultado más general probado por Banach en su tesis doctoral de 1920: el *teorema de la contracción*.

El teorema de Banach es quizás el más conocido entre los llamados *teoremas de punto fijo*, que son el punto de partida de los métodos topológicos. Sin embargo, no siempre es aplicable: por ejemplo, ¿qué ocurre si en el problema anterior pedimos solamente que F sea continua? Se sabe que todavía se puede probar la existencia, aunque no la unicidad: una demostración clásica de este hecho (llamado *teorema de Peano*) consiste en aproximar la función F por una sucesión de funciones suaves y, con un poco de Arzelà-Ascoli a favor, probar que de las soluciones de los problemas aproximados se puede extraer una sucesión que converge a una solución del problema. En el curso veremos que es posible dar una demostración mucho más directa por medio de otro teorema de punto fijo: el *teorema de Schauder*.

Pero, por supuesto, existen muchos otros problemas de ecuaciones diferenciales más allá del de valores iniciales: por ejemplo, el problema periódico

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(t+T) = X(t) \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cabe observar (¡ejercicio!) que si F es T-periódica en la variable t (es decir, $F(t+T, X) = F(t, X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $X \in \mathbb{R}^n$), entonces el problema es equivalente al problema de contorno

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(0) = X(T). \end{cases}$$

Otro ejemplo es la ecuación de segundo orden

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

con distintas condiciones de borde, por ejemplo

$$u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \qquad \text{(Dirichlet)}$$

$$u'(0) = v_0, \quad u'(T) = v_T \qquad \text{(Neumann)}$$

El problema de buscar soluciones periódicas $u(t+T) = u(t)$ en este caso se reduce, si f es T-periódica en la primera variable, al problema

$$u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T) \qquad \text{(Periódicas).}$$

En este curso trabajaremos casi exclusivamente con esta clase de problemas, porque la idea es enfocarnos en los métodos y evitar complicaciones técnicas. Pero, en algún sentido, el curso puede pensarse en la modalidad "elige tu propia aventura", ya que los temas que veremos pueden aplicarse a una gran variedad de situaciones, incluyendo -por ejemplo- problemas para ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones funcionales (e.g. con retardo), etc.

1.1 Métodos topológicos vs. métodos variacionales

Antes de comenzar con los métodos topológicos, cabe hacer una breve referencia a otro de los métodos clásicos que se emplean para probar la existencia de soluciones para ciertas ecuaciones diferenciales. Nos referimos al método variacional, cuya filosofía es muy distinta a la de los métodos topológicos: a grandes rasgos, se trata de encontrar soluciones como puntos críticos de cierta funcional apropiada. Para fijar ideas, supongamos que queremos resolver el problema de Dirichlet homogéneo

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0.$$

Si φ es una función suave que se anula en el borde del intervalo $[0, T]$, entonces multiplicando la ecuación anterior e integrando por partes, obtenemos

$$-\int_0^T u'(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^T f(t, u(t))\varphi(t)\,dt.$$

Recíprocamente, es fácil ver que si esta última identidad vale para toda φ y además sabemos que u es dos veces derivable y se anula en el borde, entonces satisface la ecuación original. De tal forma, el problema se reduce a buscar *soluciones débiles*: en cierto espacio de Banach de funciones que se anulan en el borde, buscamos u tal que

$$\int_0^T u'(t)\varphi'(t)\,dt + \int_0^T f(t, u(t))\varphi(t)\,dt = 0$$

para toda φ. No es difícil probar, en este caso, que si esto ocurre entonces u es dos veces derivable, así que resulta una solución hecha y derecha. Pero ahora cabe observar que el término de la izquierda en la igualdad anterior es en realidad una "derivada": más específicamente, consideremos la funcional

$$J(u) = \int_0^T \frac{u'(t)^2}{2} + F(t, u(t))\,dt,$$

donde F es una primitiva de f, es decir: $F(t, x) := \int_0^x f(t, s)\,ds$. Sin entrar en detalles, queda como ejercicio verificar que

$$DJ(u)(\varphi) = \int_0^T u'(t)\varphi'(t)\,dt + \int_0^T f(t, u(t))\varphi(t)\,dt,$$

donde DJ es la diferencial de J (en el sentido de Fréchet). Por ejemplo, si f es una función acotada, entonces $|F(t, u)| \leq C|u|$; luego, intuitivamente podemos pensar que J se comporta como una especie de parábola y en consecuencia alcanza un mínimo absoluto, que en particular es solución del problema. Desde ya, además de decir cúal es el misterioso 'espacio de Banach', esta técnica requiere emplear algunos resultados básicos (y a veces no tanto) del análisis funcional.

El método variacional es muy efectivo, aunque tiene la limitación de que solo puede aplicarse para problemas con cierta estructura particular denominada, precisamente, "estructura variacional". Por ejemplo, si en el problema anterior f depende también de la derivada

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)),$$

entonces el problema pierde la estructura variacional. Bienvenidos sean entonces los métodos topológicos, para este y muchísimos otros casos.

2 El método de shooting

En esta sección veremos uno de los métodos topológicos más elementales, denominado *método del disparo*. Fue introducido en 1905 por Severini [2], aunque existen versiones mucho más sofisticadas, como el principio de Ważewski (ver por ejemplo [1]). Supongamos que queremos resolver el problema

$$u''(t) = f(t, u(t))$$

con condiciones de Dirichlet

$$u(0) = u(T) = 0.$$

Todavía sabemos muy poco de los problemas de contorno pero, en principio, observemos que podría no haber soluciones: a modo de ejemplo trivial, si elegimos $f(t, u) = -u$, entonces existen (infinitas) soluciones si y solo si $T = k\pi$ para cierto $k \in \mathbb{N}$.

Ante tanta incertidumbre, podemos recurrir a un problema del que sí sabemos algo, al menos cuando la función f es buena: el de valores iniciales. Para aplicar el método de shooting uno debe resolver la ecuación anterior con valores iniciales

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = \lambda$$

y luego buscar, lleno de esperanzas, un valor de λ tal que la correspondiente solución se anula para $t = T$. Así planteado, el método puede parecer un poco tosco, como el antiguo juego de MS-DOS llamado *Gorilla*, en el que debíamos fijar un parámetro inicial, a fin de alcanzar a nuestro adversario mediante un bananazo certero. Cabe mencionar, sin embargo, que el recuerdo nos juega una mala pasada (¡y eso que pasaron apenas 35 años!): en realidad, no se trataba de elegir un parámetro sino dos, el ángulo y la rapidez. En otras palabras, el juego corresponde a un caso de *shooting bidimensional*, que veremos un poco más adelante, pues el parámetro inicial es un vector de $\mathbb{R}^2$ (en este caso, el vector velocidad).

Pero empecemos con un ejemplo bien sencillo para el caso unidimensional, suponiendo que f es una función acotada. En tal situación, cualquier gorila más o menos tenaz puede quedarse tranquilo de que su banana podrá llegar a buen puerto: en efecto, integrando una vez la ecuación obtenemos

$$u'(t) = \lambda + \int_0^t f(s, u(s))\, ds$$

y luego

$$|u'(t) - \lambda| \leq \int_0^t |f(s, u(s))|\, ds \leq T\|f\|_\infty := C.$$

En consecuencia, si $\lambda \geq C$ vale $u'(t) \geq 0$ para todo t, es decir, u resulta creciente y, en particular, $u(T) \geq 0$. Del mismo modo, si $\lambda \leq -C$ entonces u es decreciente y $u(T) \leq 0$. En consecuencia, por nuestro viejo y querido teorema de Bolzano, deducimos que existe algún $\lambda \in [-C, C]$ tal que la correspondiente solución u_λ verifica $u_\lambda(1) = 0$.

Lo anterior está muy bien, pero debemos prestar atención a dos detalles. Por un lado, pudimos usar el teorema de Bolzano porque la aplicación $\lambda \mapsto u_\lambda(1)$ es continua: esto se debe simplemente a la *dependencia continua* respecto de las condiciones iniciales. Pero antes hay una cuestión algo más inquietante: ¿cómo sabemos que dicha aplicación está bien definida? Más concretamente, ¿cómo sabemos que la solución para un valor inicial λ existe hasta $t = T$?

La respuesta es que en general no lo sabemos, aunque vale en el caso anterior, con f acotada. Esto se deduce de manera directa (ver práctica 0) y, más en general, como consecuencia inmediata del lema de Gronwall cuando f tiene crecimiento lineal en u, es decir, $|f(t, u)| \leq A|u| + B$. Pero para una f cualquiera, no es fácil determinar el dominio del operador de shooting. Se puede ver (ejercicio) que es abierto, pero podría ser muy pequeño. O incluso vacío: ¿puede el lector proponer un ejemplo?

La situación anterior (soluciones para toda f acotada) se explica porque la ecuación anterior es *no resonante* para las condiciones de Dirichlet, a diferencia de las condiciones de Neumann o periódicas, para las cuales es resonante. Más adelante veremos qué significa esto; por el momento podemos contentarnos con observar que en cualquiera de los últimos dos casos, si u es solución entonces necesariamente vale

$$\int_0^T f(t, u(t))\, dt = 0,$$

ya que $u'(0) = u'(T)$. En particular, debe ocurrir que $0 \in \mathrm{Im}(f)$; por ejemplo, si $f(t, u) = u^2 + p(t)$ con $p > 0$, entonces estamos fritos.

Queda claro que el método de shooting no sería muy emocionante si solo sirviese para el caso f acotada. A continuación veremos que con un poco de ingenio es posible adaptarlo a situaciones mucho más generales. Empecemos por otro caso sencillo, asumiendo que f es creciente respecto de la variable u, es decir:

$$u \leq v \Longrightarrow f(t, u) \leq f(t, v).$$

En primer lugar, veamos que la solución del problema de Dirichlet es única. Esto suena un poco extraño cuando no sabemos todavía que hay solución, pero de alguna forma se puede ver que esta es una de las situaciones en las que "unicidad implica existencia". A modo de ejemplo, consideremos simplemente una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; en este caso, el teorema de la dimensión asegura que si el núcleo de T es trivial, entonces para todo y existe una (única) solución al problema $Tx = y$. En este caso, para ser rigurosos, veremos primero que el problema tiene *a lo sumo* una solución y luego veremos que tiene que existir *al menos* una.

En efecto, observemos en primer lugar que si u y v son soluciones de la ecuación tales que $u(0) \geq v(0)$ y $u'(0) > v'(0)$, entonces $u'(t) > v'(t)$ y $u(t) > v(t)$ para todo intervalo $[0, b]$ en el que las funciones estén definidas. Esto se debe al simple hecho de que, por continuidad, $u'(t) > v'(t)$ en cierto intervalo $(0, \delta)$. Pero más aún, si $u' - v'$ se anulara por primera vez en cierto t_0, entonces $u - v$ sería estrictamente creciente en $(0, t_0]$ y, en particular, positiva. Luego, para $t \in [0, t_0]$ vale

$$u''(t) = f(t, u(t)) \geq f(t, v(t)) = v''(t),$$

de donde se deduce que $u' - v'$ crece en $[0, t_0]$ y, en consecuencia $u'(t_0) - v'(t_0) \geq u'(0) - v'(0) > 0$, lo que es absurdo.

Lo anterior implica que dos soluciones distintas que se anulan en 0 no se cruzan, de donde se deduce la unicidad para el problema de Dirichlet: si u es una solución tal que $u(0) = u(T) = 0$, entonces cualquier otra solución v tal que $v(0) = 0$ (y que tenga la suerte de estar definida hasta el final del intervalo) verifica $v(T) \neq u(T) = 0$.

Como sea, esto no asegura todavía la existencia: de acuerdo con lo que venimos diciendo, ni siquiera tendríamos garantías de que las soluciones del problema inicial no 'explotan' antes de llegar a T. Pero intuitivamente podemos pensar, en este caso, que las soluciones con $\lambda \gg 0$ (es decir, $\lambda > 0$ y muy grande) van a ser positivas y las soluciones con $\lambda \ll 0$ van a ser negativas. Y eso nos pone a salvo de las explosiones: al menos *algunas* soluciones tienen que llegar a destino. Esto queda como ejercicio: por ejemplo, se puede usar el hecho antes mencionado de que el conjunto $\{\lambda : u_\lambda \text{ está definida en } [0, T]\}$ es abierto.

De todas formas, no hace falta usar tantas cosas: directamente uno puede ver que si por ejemplo $\lambda > 0$, entonces $u'_\lambda > 0$ y $u_\lambda > 0$ en cierto intervalo $(0, \delta)$. Luego para $t < \delta$ vale:

$$u'_\lambda(t) = \lambda + \int_0^t f(s, u(s))\, ds \geq \lambda + \int_0^t f(s, 0)\, ds \geq \lambda - \int_0^t |f(s, 0)|\, ds.$$

Pero es claro que $\int_0^t |f(s, 0)|\, ds \leq \int_0^T |f(s, 0)|\, ds$; de esta forma, si elegimos λ mayor que esta última cantidad, entonces u'_λ (y en consecuencia u_λ) van a seguir siendo positivas por los siglos de los siglos (al menos para una cantidad de siglos menor o igual que T). Análogamente, para $\lambda < -\int_0^T |f(s, 0)|\, ds$ vale $u_\lambda < 0$. Esto sigue sin garantizar que las soluciones estén definidas aunque admite un recurso, un tanto violento pero eficaz: el truncamiento. ¿Buscamos una solución u_λ tal que $u_\lambda(T) = 0$? Bueno, entonces podemos descartar aquellas cuya imagen se escapa de cierto intervalo $[-R, R]$: más precisamente, podemos definir la función

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} u_\lambda(T) & \text{si } |u_\lambda(t)| \leq R \text{ para todo } t \leq T \\ R & \text{si } u_\lambda(t) = R \text{ para algún } t < T \\ -R & \text{si } u_\lambda(t) = -R \text{ para algún } t < T. \end{cases}$$

La clave consiste en elegir R de manera tal que ϕ sea continua. En principio, parecería funcionar todo bien por el teorema de dependencia continua, pero hay que evitar este tipo de situaciones:

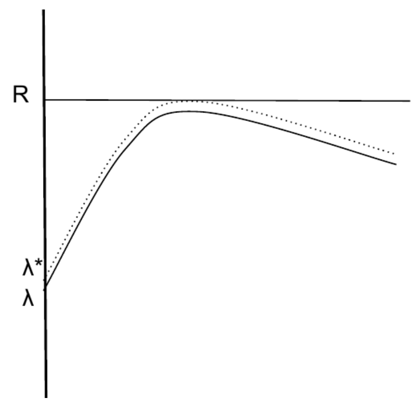

Figure 1: $\phi(\lambda^*) = R$, $\phi(\lambda) = u_\lambda(T) < u_{\lambda^*}(T) < R$

Para ello, alcanza con mostrar que si $|u(t)| = R \gg 0$ entonces $u'(t) \neq 0$. Queda como ejercicio para el lector ver que esto vale Pero ya podemos observar que, En tal caso, ϕ es continua y cambia de signo; luego se anula para algún λ. Y resulta claro que ese valor de λ tuvo que haberse salvado del truncamiento, de modo que u_λ es la (única) solución que andábamos buscando.

Notemos que en la prueba de existencia no usamos en realidad la unicidad, sino un hecho que en realidad es más fuerte: dos soluciones que empiezan en 0 no vuelven a cruzarse. Pero también hay otras maneras de convencerse de la existencia de soluciones, por ejemplo empleando las llamadas *cotas a priori.* El nombre puede parecer polémico desde el punto de vista filosófico, pues: ¿cómo acotar algo que aún no sabemos que existe? Sin embargo, es un procedimiento muy común y ayuda a encontrar soluciones: a la hora de buscarlas, es muy conveniente saber dónde hacerlo. En la situación anterior, un primer intento podría consistir en observar que la solución debe estar entre $u_{-\lambda}$ y u_λ, donde $\lambda = \int_0^T |f(t,0)|\,dt$, pero esto puede resultar un fracaso[1]: esas soluciones podrían irse a infinito. Vamos a hacer algo mejor, y de paso -¿por qué no?- aprender un nuevo truco que vamos a usar, según estimaciones moderadas, algunos miles de

[1] Para decirlo en modo tanguero: Por eso en tu total, fracaso de vivir, ni el *shooting* del final te va a salir.

veces a lo largo del curso. Sea u una tal solución del problema de Dirichlet, por ahora de dudosa existencia. Multiplicando la ecuación por u y luego integrando, resulta

$$\int_0^T u''(t)u(t)\,dt = \int_0^T f(t,u(t))u(t)\,dt.$$

Como u se anula en los extremos, integrando por partes queda

$$-\int_0^T u'(t)u'(t)\,dt = \int_0^T f(t,u(t))u(t)\,dt.$$

Pero observemos también que

$$f(t,u)u = [f(t,u) - f(t,0)]u + f(t,0)u \geq f(t,0)u,$$

porque f es creciente. Entonces vale

$$\int_0^T u'(t)^2\,dt \leq -\int_0^T f(t,u(t))u(t)\,dt \leq -\int_0^T f(t,0)u(t)\,dt$$

y en consecuencia

$$\int_0^T u'(t)^2\,dt \leq \|u\|_\infty \int_0^T |f(t,0)|\,dt := C\|u\|_\infty.$$

Ahora vamos a usar otra acotación muy frecuente: como u se anula en los extremos entonces existe una constante k (independiente de u) tal que

$$\|u\|_\infty^2 \leq k\int_0^T u'(t)^2\,dt.$$

Por ejemplo (sin pretender encontrar la k óptima), alcanza con observar que

$$|u(t)| = \left|\int_0^t u'(s)\,ds\right| \leq \int_0^t |u'(s)|\,ds \leq \int_0^T |u'(s)|\,ds$$

para todo t. Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene:

$$|u(t)| \leq \left(\int_0^T 1^2\,ds\right)^{1/2} \left(\int_0^T u'(s)^2\,ds\right)^{1/2}$$

y en consecuencia

$$\|u\|_\infty^2 \leq T\int_0^T u'(s)^2\,ds.$$

A partir de la desigualdad anterior, concluimos:

$$\|u\|_\infty^2 \leq T\int_0^T u'(s)^2\,ds \leq TC\|u\|_\infty$$

y, en definitiva, $\|u\|_\infty \leq TC$.

Al cabo de tanto trabajo, no nunca falta el aguafiestas que nos pregunte: y esto, ¿para qué sirve? Pero tenemos una respuesta preparada para salir del paso: buscar una solución es como buscar una aguja en un pajar; las cotas a priori nos permiten achicar el pajar. En este caso, sabemos que no tiene sentido buscar afuera del intervalo $[-R, R]$, donde $R = CT$. En la próxima clase veremos cómo sacar provecho de esto.

References

[1] Hartman, xxxxxxxxxxx

[2] Severini, xxxxxxxxxxxx