Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clases 18 y 19 (¡dos por una!) 9 y 11/11
Versión preliminar

1 Un ejemplo de Kakutani

En la incesante lucha contra los problemas no lineales, uno de nuestros caballitos de batalla fue, sin duda, el teorema de Brouwer. Hasta ahora lo usamos en general en una bola o eventualmente en un cuadrado, para ver su equivalencia con Poincaré-Miranda, pero es claro que vale para cualquier conjunto homeomorfo a la bola unitaria $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$: en efecto, si $\varphi : \overline{B} \to C$ es un homeomorfismo y $f : C \to C$ es continua, entonces nada mejor que conjugar: la función $\varphi^{-1} f \varphi$ tiene un punto fijo $x \in \overline{B}$ y entonces $\varphi(x)$ es un punto fijo de f. En particular, C puede ser cualquier conjunto cerrado, acotado y convexo en un espacio normado de dimensión finita.

Sin embargo, el siguiente ejemplo de Kakutani de 1943 muestra que si la dimensión del espacio es infinita entonces hace falta pedir alguna condición adicional para f. Por simplicidad, consideremos el espacio de Hilbert de sucesiones reales

$$l^2 := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum a_n^2 < \infty\}$$

provisto del producto interno usual

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

La idea de Kakutani surge de considerar un operador de *shift* que "empuja" las coordenadas de un punto a un lugar hacia la derecha

$$a_j \mapsto a_{j+1},$$

ya que los elementos de l^2 no pueden tener todas las coordenadas iguales. A menos, claro, que se trate del 0, que es precisamente el único punto fijo del operador shift. Ninguna sorpresa, ya que es lineal. Pero uno se puede sacar de encima el problema proponiendo, por ejemplo, $f : l^2 \to l^2$ dada por

$$f(a) = \left(\sqrt{1 - \|a\|^2}, a_1, a_2, a_3, \dots\right).$$

Ahora tenemos lo que queríamos: por un lado, f es continua y vale

$$\|f(a)\|^2 = 1 - \|a\|^2 + \|a\|^2 = 1,$$

es decir $f(\overline{B_1(0)}) \subset \partial B_1(0)$. Por otro lado, si a es punto fijo de f entonces $\|a\| = 1$ y $a_j = a_{j+1}$ para todo j, lo que es absurdo.

Después del ejemplo de Kakutani surgieron otros similares como el que sigue, que conspira seriamente contra nuestras intenciones de definir en dimensión infinita algo parecido al grado de Brouwer. Sea $h : L^2(0,1) \times [0,1] \to L^2(0,1)$ dada por

$$h(f,\lambda) = \begin{cases} f(t/\lambda) & t < \lambda \\ 1 & t \geq \lambda. \end{cases}$$

Esto no tiene mucho sentido si $\lambda = 0$, pero entonces podemos poner $h(f,0) \equiv 1$. Esta elección no es caprichosa sino que responde a lo que uno intuitivamente espera: cuando λ es chico, $h(f,\lambda)$ vale 1 en casi todo el dominio, salvo el tramo inicial, que está bajo control:

$$\int_0^1 |h(f,\lambda)(t) - 1|\, dt = \int_0^\lambda |f(t/\lambda) - 1|\, dt = \lambda \int_0^1 |f(s) - 1|\, ds.$$

Esto muestra que h es continua. Pero, además, la misma sustitución $s = t/\lambda$ muestra para $\lambda > 0$ que

$$\|h(f,\lambda)\|_{L^2}^2 = \int_0^\lambda f(t/\lambda)^2\, dt + 1 - \lambda = \lambda \|f\|_{L^2}^2 + 1 - \lambda.$$

Luego $h_\lambda(\overline{B_1(0)}) \subset \overline{B_1(0)}$ y $h_\lambda(\partial B_1(0)) \subset \partial B_1(0)$. ¡Tremenda homotopía! Notemos que h_1 es la identidad y h_0 es constante, y así no hay grado que valga. Si uno tiene ganas de terminar de convencerse, no es muy difícil inventar, usando esta h, toda clase de objetos asombrosos: retracciones de la bola cerrada en su borde o funciones $T : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ sin puntos fijos.

En definitiva, ya nos convencimos de que Brouwer no se extiende así nomás. a espacios de dimensión infinita. Aunque no es difícil imaginar una condición razonable para que el resultado siga valiendo: la compacidad.

2 El teorema de Schauder

En esta sección vamos a ver que toda función compacta de la bola cerrada en si misma tiene al menos un punto fijo. Como es de esperar, se puede prescindir del hecho de que el dominio sea una bola: el teorema vale para cualquier conjunto C que sea convexo, cerrado y acotado. Y en realidad se puede prescindir también de que el espacio sea de Banach: en el fondo, esto se debe a que la compacidad garantiza la completitud. La idea principal consiste en probar que un operador compacto siempre se puede aproximar por un operador de rango finito, es decir, cuya imagen está contenida en un espacio de dimensión infinita. Esto puede sonar desconcertante para quien haya visto, en un curso de análisis funcional, que no todo operador (lineal) compacto se aproxima por operadores de rango finito; sin embargo, aquí nos referimos a operadores definidos en un conjunto cerrado y acotado.

Lema 2.1 *Sea X un espacio normado y $T : C \to X$ con $C \subset X$ cerrado y acotado tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existen $V_\varepsilon \subset X$ subespacio de dimensión finita y $T_\varepsilon : C \to V_\varepsilon$ tales que $\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in C$.*

Demostración: Fijemos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{T(C)}$ tales que

$$\overline{T(C)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j)$$

y definamos $J : \overline{T(C)} \to \text{gen}\{x_1, \ldots, x_n\}$ dada por

$$J(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{dist(y, \overline{T(C)} - B_j)}{\sum_{i=1}^{n} dist(y, \overline{T(C)} - B_i)} x_j,$$

donde $B_j =: B_\varepsilon(x_j)$. Es claro que J está bien definida, porque para todo $y \in \overline{T(C)}$ existe j tal que $x \in B_j$; por otra parte, J resulta continua. Además, para $y \notin B_k$ vale $dist(y, \overline{T(C)} - B_k) = 0$, de donde se deduce:

$$dist(y, \overline{T(C)} - B_j)\|y - x_j\| \leq \varepsilon dist(y, \overline{T(C)} - B_j)$$

para todo j. En consecuencia,

$$\|J(y) - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{dist(y, \overline{T(C)} - B_j)}{\sum_{i=1}^{n} dist(y, \overline{T(C)} - B_i)} (x_j - y) \right\| \leq \varepsilon$$

para todo $y \in \overline{T(C)}$ y entonces alcanza con tomar $T_\varepsilon := J \circ T$.

$\square$

Observación 2.2 *De acuerdo con la construcción anterior, la imagen de T_ε se puede especificar un poco más, ya que $J(y)$ es una combinación convexa de los puntos $x_1, \ldots, x_n$. De esta forma, se deduce que*

$$T_\varepsilon(C) \subset \text{co}(\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \text{co}(\overline{T(C)})$$

*donde '*co*' indica la cápsula convexa.*

Teorema 2.3 *(Schauder) Sea E un espacio normado, y sea $C \subset E$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Supongamos que $T : C \to C$ es una función continua tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Entonces T tiene al menos un punto fijo.*

Demostración: De acuerdo con la construcción del lema previo y la observación, para cada k tenemos T_k una $\frac{1}{k}$-aproximación de T con $T_k(C) \subset C_k \subset$

$\mathrm{co}(\overline{T(C)}) \subset C$, donde C_k es la cápsula convexa de un conjunto finito. Por el teorema de Brouwer, $T_k|_{C_k} : C_k \to C_k$ tiene un punto fijo z_k y, por compacidad, $\{Tz_k\}$ admite una subsucesión $\{Tz_{k_j}\}$ que converge a cierto $z \in \overline{T(C)} \subset C$. Luego

$$\|z_{k_j} - Tz_{k_j}\| = \|(T_{k_j}(z_{k_j}) - Tz_{k_j}\| \leq \frac{1}{k_j} \to 0.$$

Se deduce que $z_{k_j} \to z$ y entonces $Tz = \lim_{j\to\infty} Tz_{k_j} = z$.

$\square$

3 El tiempo viejo otra vez vendrá

El teorema de Schauder nos permite probar la existencia de puntos fijos de operadores compactos: ¡justo lo que necesitábamos! Todos los problemas de la forma $Lu = N(u)$ que estamos viendo se reducen, cuando L es inversible, a un problema de punto fijo $u = L^{-1}N(u)$, con tanta fortuna que $T := L^{-1}N$ es compacto. Entonces solo hace falta encontrar un conjunto acotado C que sea convexo, cerrado e invariante. El primer ejemplo es el del problema de valores iniciales

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^\times\mathbb{R}^n$ es un entorno de (t_0, x_0). Como ya vimos, si fijamos $R > 0$ y $\hat{\delta} > 0$ tal que $\hat{C} := [t_0 - \hat{\delta}, t_0 + \hat{\delta}] \times \overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ y $M := \|f|_{\hat{C}}\|_\infty$, entonces el operador $Tx(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds$ está bien definido y es compacto en $C := \overline{B_R(x_0)} \subset C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, donde $\delta \leq \hat{\delta}$. Pero además

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds \leq \delta M \right|,$$

entonces alcanza con pedir $\delta M \leq R$ y todo, todo se olvida, incluso la condición de Lipschitz. El lector puede obtener un resultado análogo, por ejemplo, para un sistema con retardo $x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$ o incluso el problema general $x'(t) = F(t, x_t)$, aunque en este último caso no alcanza con pedir f continua.

También podemos traer el recuerdo de pasadas alegrías y ver por qué algunos problemas anduvieron tan bien cuando de shooting se trataba. Por ejemplo, para el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

con f continua (acá también, podemos meter Lipschitz en bolsa), el operador $L^{-1}N$ toma la siguiente forma: $\mathcal{T} : C[0,T] \to C[0,T]$ dado por $\mathcal{T}(v) = u$ la única solución del problema $u''(t) = f(t, v(t))$ tal que $u(0) = u(T) = 0$. Si f es acotada, nada más sencillo: ya vimos en otros ejemplos que si u se anula en los bordes entonces

$$\|u\|_\infty \leq c\|u''\|_\infty.$$

En particular,

$$\|\mathcal{T}(v)\|_\infty \leq c\|f(\cdot, v)\|_\infty \leq R$$

para cierta constante R. Esto quiere decir que $\mathcal{T}$, además de compacto, se mete en una bola de radio R y entonces el conjunto $C = \overline{B_R(0)}$ es invariante. Y si queremos ponernos más permisivos, también podemos dejar que la f no sea acotada pero crezca linealmente: si $|f(t,u)| \leq A|u| + B$, entonces resulta

$$\|\mathcal{T}(v)\|_\infty \leq c(A\|v\|_\infty + B)$$

Luego, si $cA < 1$ alcanza con tomar C como antes, eligiendo R suficientemente grande como para que $R(1 - cA) \geq cB$. Y la situación no cambia mucho si f depende también de u': la diferencia es que ahora el punto fijo habrá que encontrarlo en otro espacio, por ejemplo $C^1[0,T]$. El mismo resultado vale para cualquier caso no resonante, por ejemplo para el problema

$$u'' - \lambda u = f(t, u(t))$$

con $\lambda > 0$, que también anda bien con condiciones periódicas o de Neumann. La constante c será distinta en cada caso, pero la idea es siempre la misma, usar que

$$-\int_0^T [u''(t) - \lambda u(t)]u(t)\,dt = \int_0^T [u'(t)^2 + \lambda u(t)^2]\,dt,$$

de donde se deduce que

$$\|u'\|_{L^2} \leq \frac{T}{\pi}\|u'' - \lambda u\|_{L^2}.$$

Como se puede observar, en realidad es posible aprovechar el término λu^2 y obtener cotas mejores; por otra parte, sabemos que si queremos cotas finas entonces conviene más trabajar en $L^2(0,T)$ que en $C[0,T]$, aunque no es momento de hacernos los finos (rumbeando pa'l taller va Josefina/que en la milonga, ayer, la iba de fina).

A modo de ejercicio, veamos cómo se puede probar la existencia de soluciones periódicas del problema de Nicholson

$$x'(t) = -d(t)x(t) + p(t)x(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}$$

con $d, p > 0$ funciones continuas T-periódicas tales que $p(t) > d(t)$ para todo t. Un planazo es usar el operador de Poincaré: dada $\varphi \in C[-\tau, 0]$ definimos $P(\varphi)$ como ya anticipamos, mirando último tramito de la solución del problema con condición inicial φ. La notación x_t hace las cosas más sencillas: se trata de resolver el problema

$$x'(t) = -d(t)x(t) + p(t)x(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}, \qquad x_0 = \varphi$$

y definir $P(\varphi) := x_T$. Queda como ejercicio ver que P está bien definido y es compacto; además, si $\varphi > 0$ entonces $x(t) > 0$ para todo t. Por otra parte, si $x'(t) \geq 0$ entonces $d(t)x(t) \leq \frac{p(t)}{e}$, es decir, $x(t) \leq \frac{1}{e}\left(\frac{p}{d}\right)_{\max}$. De esta forma, si tomamos M mayor que esta última cantidad, se deduce que las soluciones con dato inicial tal que $0 < \varphi \leq M$ verifican $0 < x(t) \leq M$. Pero claro, esto no alcanza para usar Schauder, porque necesitamos un conjunto C que sea cerrado. Y agregar las funciones que llegan hasta el 0 sería una pésima idea, porque $x \equiv 0$ es solución. Tal como vimos en el caso discreto, la cosa se resuelve tomando $C := \{\varepsilon \leq \varphi \leq M\}$, donde ε es suficientemente chico. Pero hace falta ver que C es invariante, cosa que sale con el argumento que ya vimos. En primer lugar, fijamos $\hat{\varepsilon} > 0$ tal que si $\varepsilon \leq \hat{\varepsilon}$ entonces vale $xe^{-x} \geq \varepsilon e^{-\varepsilon}$ para $x \in [\varepsilon, M]$. Ahora supongamos que para cierto $t_0 > 0$ vale $x(t) \geq x(t_0) = \varepsilon$ para $t \leq t_0$. Entonces $x'(t_0) \leq 0$, es decir:

$$d(t_0)\varepsilon \geq p(t_0)x(t_0 - \tau)e^{-x(t_0-\tau)} \geq p(t_0)\varepsilon e^{-\varepsilon}.$$

Luego, alcanza con tomar $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}]$ tal que $e^{\varepsilon} < \left(\frac{p}{d}\right)_{\min}$. Queda como ejercicio demostrar el mismo resultado pero ahora definiendo el operador $y \mapsto x$ dado por la ecuación lineal $x'(t) + d(t)x(t) = p(t)y(t - \tau)e^{-y(t-\tau)}$ en algún subconjunto apropiado de C_T.

Y las super y subsoluciones, ¿qué se habrán hecho, dónde andarán? Para la convergencia monótona, recordemos, habíamos pedido que f fuera Lipschitz para poder restar un término λu y hacerla decreciente. Ahora eso no hace falta; en principio, si $\alpha \leq \beta$ son una sub y una supersolución para el problema de Dirichlet, entonces se define la función de truncamiento

$$P(t, u) := \begin{cases} f(t, u) & \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \\ \beta(t) & u > \beta(t) \\ \alpha(t) & u < \alpha(t). \end{cases}$$

Por Schauder, para cualquier $\lambda > 0$ el problema de Dirichlet para $u''(t) - \lambda u(t) = f(t, P(t, u(t))) - \lambda P(t, u(t))$ tiene una solución u y luego se prueba -como todos recordarán- que el truncamiento no trunca. Uno podría preguntarse por qué restamos λu de todas formas, siendo que no hay resonancia. La explicación está en que no pedimos que la sub y la supersolución sean estrictas. Por eso, a la hora de ver por ejemplo que $u \leq \beta$, se supone que $u - \beta$ alcanza un máximo positivo en cierto t_0 y entonces

$$0 \geq u''(t_0) - \beta''(t_0) = f(t_0, \beta(t_0)) - \lambda(\beta(t_0) - u(t_0)) - \beta''(t_0) \geq \lambda(u(t_0) - (\beta(t_0)).$$

Esto es absurdo, pero si lo hacíamos con $\lambda = 0$ el razonamiento se arruinaba. La misma cuenta se puede hacer para otras condiciones de contorno, como periódicas o Neumann. Pero podemos agregar otro ingrediente a la cuenta si consideramos f dependiente también de la derivada, es decir:

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)).$$

Hay un ejemplo sencillo debido a Habets y Pouso [3] que muestra que una sub y una super no garantizan que haya soluciones, por más ordenadas que estén. Consideremos el problema de Dirichlet

$$\left(\frac{u'(t)}{\sqrt{1 + u'(t)^2}}\right)' = u(t) \qquad u(0) = u(T) = 2.$$

Esto parece una manera rebuscada de escribir la ecuación, pero tiene su explicación: el operador del término izquierdo es la versión unidimensional del operador de curvatura media, que da lugar a una ecuación bastante conocida:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=nH,$$

donde H es la tan mentada curvatura. Como sea, el problema se lleva a la forma semilineal tras un suave murmullo de tu derivar:

$$u''(t)=u(t)\left(1+u'(t)^2\right)^{3/2}. \tag{1}$$

Lo bueno de escribirlo en la forma original es que multiplicando por u' e integrando se verifica de manera inmediata (digamos) que

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'(t)^2}}+\frac{u(t)^2}{2}=C \tag{2}$$

donde

$$C=2+\frac{1}{1+u'(0)^2}\in(2,3].$$

En particular, $u(t)^2\geq 2(C-1)>2$, así que $u(t)>\sqrt{2}$ para todo t. Además, si t_0 es un punto crítico vale

$$u(t_0)=\sqrt{2(C-1)}\leq 2$$

y, como $u\equiv 2$ no es solución, la desigualdad anterior es estricta. En resumen, u alcanza en t_0 su (único) valor mínimo $u_{\min}=\sqrt{2(C-1)}$ y es claro que no puede haber otros puntos críticos. A esta altura, ya no podemos seguir ocultando el hecho de que $t_0=\frac{T}{2}$, ya que u es simétrica. En efecto, a partir de la identidad (2) y del hecho que $u(0)=u(T)$ se ve que $u'(T)^2=u'(0)^2$; por lo anterior resulta $u'(0)=-u'(T)<0$. Si ahora definimos $v(t)=u(T-t)$, se ve que es solución de la misma ecuación, con $v(0)=u(T)=u(0)$ y $v'(0)=-u'(T)=u'(0)$, es decir: $v=u$. En resumen, u decrece en $(0,\frac{T}{2})$ y crece en $(\frac{T}{2},T)$ y por (2) vale

$$u'(t)^2=\frac{1}{\left(C-\frac{u(t)^2}{2}\right)^2}-1=\frac{1-\left(C-\frac{u(t)^2}{2}\right)^2}{\left(C-\frac{u(t)^2}{2}\right)^2}.$$

Si definimos $s=u(t)$, obtenemos

$$\frac{T}{2}=\int_0^{\frac{T}{2}}dt=\int_{u_{\min}}^{2}\frac{C-\frac{s^2}{2}}{\sqrt{1-\left(C-\frac{s^2}{2}\right)^2}}\,ds$$

y una nueva sustitución $z=C-\frac{s^2}{2}$ muestra que

$$\frac{T}{2}=\int_{C-2}^{1}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{2(C-z)}}\,dz\leq\frac{1}{u_{\min}}\int_0^1\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esto muestra que no hay soluciones si $T \geq \sqrt{2}$, a pesar de que cualquier constante $\alpha < 0$ es subsolución y cualquier constante $\beta > 2$ es supersolución.

Una miradita a la ecuación escrita en la forma (1) nos hace entender por qué el método de super y subsoluciones falla en este caso: mirado como función de u', el término de la derecha es un polinomio cúbico. La llamada *condición de Nagumo* sirve para encontrar cotas para la derivada, pero exige que el crecimiento de la no-linealidad sea esencialmente cuadrático. Para decirlo en términos más precisos, podemos olvidarnos un rato de las ecuaciones diferenciales

Lema 3.1 *Sea u de clase C^2 y fijemos $R_* = |u'(t_*)|$ para algún valor t_*. Supongamos que $|u''(t)| \leq \psi(|u'(t)|)$ para todo t, donde ψ satisface*

$$\int_{R_*}^{R} \frac{s}{\psi(s)}\, ds > u_{\max} - u_{\min}.$$

Entonces $|u'(t)| < R$ para todo t.

<u>*Demostración*</u>: Supongamos por ejemplo que $u'(t) \geq R$ para algún t. Entonces podemos fijar t_0, t_1 tales que $u'(t_0) = R_*$, $u(t_1) = R$ y además $R_* < u'(t) < R$ para t entre t_0 y t_1. Entonces empleando la sustitución $s = u'(t)$ se deduce que

$$\int_{R_*}^{R} \frac{s}{\psi(s)}\, ds = \int_{t_0} t_1 \frac{u'(t)}{\psi(u'(t))} u''(t)\, dt \leq \left| \int_{t_0}^{t_1} u'(t)\, dt \right| = |u(t_1) - u(t_0)|,$$

lo que contradice la hipótesis. La desigualdad $u'(t) > -R$ se obtiene de manera análoga.

$\square$

Por ejemplo, si $\psi(s) = s^2 + 1$ la condición se cumple para algún R, ya que para cualquier $R_* \geq 0$ vale

$$\int_{R_*}^{\infty} \frac{s}{s^2 + 1}\, ds = \infty.$$

En particular, cuando se trata de un problema

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

para el que tenemos $\alpha \leq \beta$ una sub y una supersolución, el valor de R_* dependerá de cuál es la condición de borde: por ejemplo, para el caso periódico siempre se puede tomar $R_* = 0$, mientras que para Dirichlet lo razonable es considerar $R_* = \frac{|u(T) - u(0)|}{T}$. Si se tratase de condiciones más extrañas, donde no sea posible conocer de antemano algún valor de u', siempre nos queda el recurso de observar que si $\alpha \leq u \leq \beta$ entonces para algún t vale

$$\frac{\beta_{\min} - \alpha_{\max}}{T} \leq u'(t) \leq \frac{\beta_{\max} - \alpha_{\min}}{T}.$$

En resumen, gracias a la condición de Nagumo podemos dar una versión más general del método de super y subsoluciones. Lo planteamos para Dirichlet, pero es lo mismo si se trata de condiciones periódicas, de Neumann o muchas otras.

Proposición 3.1 *Sean $\alpha \leq \beta$ una sub y una supersolución del problema*

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \qquad u(0) = u(T) = 0$$

con f continua tal que $|f(t, u, v)| \leq \psi(|v|)$ para $(t, u, v) \in C$, donde

$$C := \{(t, u, v) : t \in [0, T], \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Supongamos que para cierto $R > \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty\}$ vale

$$\int_0^R \frac{s}{\psi(s)}\, ds > \beta_{\max} - \alpha_{\min}$$

Entonces el problema tiene al menos una solución u tal que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Demostración: Alcanza con definir un nuevo truncamiento,

$$Q(v) := \begin{cases} v & |v| \leq R \\ R & v > R \\ -R & v < -R. \end{cases}$$

Para $\lambda > 0$, el problema

$$u''(t) - \lambda u(t) = f(t, P(t, u(t)), Q(u'(t))) - \lambda P(t, u(t))$$

tiene al menos una solución u tal que $u(0) = u(T) = 0$. ¿Será cierto ahora que los truncamientos no truncan? Para el primero la cuenta es la de siempre, solo hay que observar que si por ejemplo $u(t_0) > \beta(t_0)$ para cierto t_0 donde $u - \beta$ alcanza su máximo, entonces $u'(t_0) = \beta'(t_0)$, así que vale

$$u''(t_0) - \lambda u(t_0) = f(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)) - \lambda\beta(t_0)$$

y sale todo como siempre. Una vez que ya sabemos que $\alpha \leq u \leq \beta$, tomando $R_* = 0$ el lema anterior nos garantiza que $|u'(t)| < R$.

□

Un ejemplo que va y vuelve (literalmente) es el del péndulo forzado

$$u''(t) + au'(t) + b\,\mathrm{sen} u(t) = p(t)$$

con $p \in C_T$, $a \geq 0$ y $b > 0$. Como ya comentamos, la existencia de soluciones T-periódicas es fácil de probar por super y subsoluciones cuando p es chico. Pero ya dijimos que el chiquitaje no es necesario, en el caso sin fricción, cuando $\overline{p} = 0$. El detalle es que la prueba de esto es variacional y cuentan que fue el pibe de arrabal (mejor dicho, de Granada) quien encontró contraejemplos para $a > 0$ (ver [4]). Pero hay otro resultado interesante, debido a Alfonso Castro [1] que queda más claro cuando uno escribe el problema de esta manera:

$$u''(t) + b\,\mathrm{sen} u(t) = p_0(t) + s$$

donde $\overline{p_0} = 0$ y $s \in \mathbb{R}$. Ya sabemos (¡claro, claro!) que solo puede haber soluciones T-periódicas si $|s| \le b$ y que efectivamente las hay cuando $s = 0$. Lo que Castro demostró es que existen números $d(p_0), D(p_0)$ con

$$-b \le d(p_0) \le 0 \le D(p_0) \le b$$

tales que el problema tiene solución si y solo si $s \in [d(p_0), D(p_0)]$. Pero más todavía, d y D son funciones continuas de p_0. Hay un problema abierto espectacular, que consiste en ver si existe o no alguna p_0 tal que el problema es degenerado (sin ofender), es decir, tal que $d(p_0) = D(p_0) = 0$. Para los más audaces, vale el siguiente comentario: existe un abierto denso de funciones p_0 tales que $d(p_0) < D(p_0)$. El hecho de que sea abierto no es ningún misterio, si uno ya probó que d y D son continuas, pero la densidad tiene toda la pinta de... usted lo ha dicho, el lema de Sard. O, mejor dicho (siempre por usted), el lema de Sard-Smale, que es una generalización de tan grato resultado para dimensión infinita.

No llegaremos tan lejos, pero sí podemos ver una versión del resultado de Castro para el caso con rozamiento $a > 0$ que, como sabemos, no es variacional. Pero ya conocemos el teorema de Schauder, qué más podríamos necesitar? Vamos a demostrar la existencia de $d(p_0) \le D(p_0)$; lo que por razones obvias no podremos probar es que el 0 pertenece al intervalo $[d(p_0), D(p_0)]$. Sin desmerecer nuestras aptitudes, debemos mencionar que la idea no es nuestra sino de Fournier y Mawhin [2], quienes además dieron condiciones suficientes para que $d(p_0) < 0 < D(p_0)$.

Empecemos por observar quiénes son los posibles valores de s: si u es una solución, al integrar la ecuación se obtiene

$$b \int_0^T \operatorname{sen} u(t)\, dt = Ts,$$

lo que permite reescribir el problema en forma integro-diferencial:

$$u''(t) + au'(t) + b \operatorname{sen} u(t) = p_0(t) + \frac{b}{T} \int_0^T \operatorname{sen} u(s)\, ds. \tag{3}$$

Este último problema tiene una gran ventaja: si u es una solución tal que $u(0) = u(T)$, entonces automáticamente es solución del problema T-periódico, ya que integrando se obtiene

$$u'(T) - u'(0) + b \int_0^T \operatorname{sen} u(t)\, dt = b \int_0^T \operatorname{sen} u(t)\, dt,$$

de donde $u'(T) = u'(0)$. Pero con tantos términos acotados, es inmediato verificar usando Schauder que, para cualquier $r \in \mathbb{R}$, el problema (3) tiene al menos una solución u que cumple la condición de Dirichlet

$$u(0) = u(T) = r. \tag{4}$$

Así que el conjunto de valores de s tales que el problema original tiene solución T-periódica es claramente no vacío: se trata del conjunto

$$I = \left\{ \frac{b}{T} \int_0^T \operatorname{sen} u(s)\, ds : u \text{ es solución de (3)-(4) para algún } r \right\}.$$

Claro que lo llamamos I con la firme convicción de que va a ser un intervalo, pero esto hay que probarlo. Y también que es cerrado (felizmente, ya sabemos que es acotado). A modo de comentario despreocupado, cabe observar que si el conjunto se reduce a un único punto, eso quiere decir que $\frac{b}{T} \int_0^T \operatorname{sen} u(s)\, ds$ es constante sobre el conjunto de todas las soluciones de (3)-(4).[1]

Veamos en primer lugar que I es conexo. Para esto, dados $s_1 < s_2$ pertenecientes a I, podemos considerar soluciones T-periódicas u_1 y u_2 de los respectivos problemas. Si $s_1 < s < s_2$, entonces

$$u_1''(t) + a u_1'(t) + b \operatorname{sen} u_1(t) = p_0(t) + s_1 < p_0(t) + s$$

es decir, u_1 es una supersolución. ¡Súper! De la misma forma, se deduce que u_2 es subsolución. Y la condición de Nagumo es obvia, porque el término correspondiente a u' es lineal. La macana, claro, es que no sabemos si u_1 y u_2 están ordenadas como nos gustaría, es decir, $u_2 \leq u_1$. Pero no es cuestión de irnos al mazo teniendo las treinta y tres: la periodicidad del problema nos dice que $u_1 + 2k\pi$ es supersolución para todo $k \in \mathbb{Z}$, así que alcanza con tomar k tan grande como haga falta. Usando grado, veremos que en realidad el problema para s tiene al menos 2 soluciones geométricamente distintas.

Solo falta ver que I es cerrado ya que, con una cuenta muy similar, el lector ávido de comprobar hasta el último detalle podrá ver también la continuidad respecto de p_0. Supongamos por ejemplo que $s_n \in I$ converge a cierto s. Tenemos entonces soluciones T-periódicas

$$u_n''(t) + a u_n'(t) + b \operatorname{sen} u_n(t) = p_0(t) + s_n$$

y podemos suponer (otra vez por periodicidad) que $u_n(0) \in [0, 2\pi]$. Como tantas otras veces, multiplicando por u_n e integrando (o también por u_n', en el caso $a > 0$) vemos que $\{u_n'\}$ es acotada en el sentido de L^2 y en consecuencia $\{u_n\}$ está uniformemente acotada. Esto dice que también $\{u_n''\}$ es acotada en L^2; de acá se deduce que existe una subsucesión de $\{u_n\}$ que converge en el sentido de C^1 a una función u, que resulta ser solución del problema para s.

Consideremos ahora un problema con retardo, por ejemplo

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda b(t) e^{x(t-\tau)}$$

[1] La 'despreocupación' hace referencia al hecho de que no tenemos mucha expectativa de resolver el problema abierto antes mencionado. Esto recuerda aquella aguafuerte porteña de Arlt, donde el narrador *...contemplaba a las mujeres que pasaban, con esa bondadosa ecuanimidad que albergan los sujetos que saben que las mujeres no les llevan el apunte.*

donde $a, b > 0$ son T periódicas y $\lambda > 0$ es un parámetro. Una primera observación, para ir entrando en calor, es que si λ es chico entonces hay alguna solución T-periódica: por ejemplo, podemos definir $F : C_T^1 \times \mathbb{R} \to C_T$ dada por

$$F(x,\lambda)(t) = x'(t) + a(t)x(t) - \lambda b(t)e^{x(t-\tau)}.$$

Como $F(0,0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(x,0)(\varphi) = \varphi' + a\varphi$, que es inversible, nuestro querido TFI nos dice que hay una ramita de soluciones $x(\lambda)$ cerca del origen. Vamos a ver ahora que el conjunto I de aquellos $\lambda > 0$ para los que hay solución es (como su nombre hace presagiar) un intervalo: concretamente, veremos que si $\hat{\lambda} \in I$ entonces $(0, \hat{\lambda}] \subset I$. Para esto, observemos en primer lugar que las soluciones T-periódicas son siempre positivas: si x alcanza un mínimo en t_0 entonces

$$a(t_0)x(t_0) = \lambda b(t_0)e^{x(t_0-\tau)} > 0.$$

Observación 3.2 *En rigor, esta última cuenta no es otra cosa que el principio del máximo, válido para cualquier $a \in C_T$ positiva: si $x \in C_T$ es tal que $x' + ax \geq 0$ entonces $x \geq 0$, y la segunda desigualdad es estricta en caso de que la primera lo sea.*

De esta forma, si $\hat{x} \in C_T^1$ es una solución para $\hat{\lambda}$, entonces para $\lambda < \hat{\lambda}$ podemos considerar el conjunto

$$C := \{x \in C_T : 0 \leq x(t) \leq \hat{x}(t)\}$$

y el operador $T : C \to C_T$ dado por $Ty = x$, donde $x \in C_T^1$ es la única solución del problema

$$x'(t) + a(t)x(t) = \lambda b(t)e^{y(t-\tau)}.$$

Como en los casos anteriores, T resulta compacto; además, por la misma cuenta de antes vemos que $Ty(t) > 0$ para todo t y toda función y. Pero además, si $y \leq \hat{x}$, entonces para $x = Ty$ vale

$$x'(t) + a(t)x(t) = \lambda b(t)e^{y(t-\tau)} \leq \lambda b(t)e^{\hat{x}(t-\tau)} = \hat{x}'(t) + a(t)\hat{x}(t),$$

de donde, por el principio del máximo, $x \leq \hat{x}$. Esto quiere decir que $T(C) \subset C$, y se deduce por Schauder que hay un punto fijo.

Observación 3.3 *Esta aparición tan rotunda y eficaz del principio del máximo nos hace pensar: ¿no se tratará directamente del método de super y subsoluciones, que supuestamente no valía para ecuaciones con retardo? Notemos que, en efecto, 0 es subsolución y $\hat{x}$ es supersolución pero, además, el término de la derecha es creciente: de esta forma, las iteraciones monótonas funciona directamente, sin necesidad de sumar ningún término a la ecuación. Para el caso más general*

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$$

no habría problema en sumar un término $\lambda x(t)$, pero el panorama se pone más sombrío si queremos sumar algo de la pinta $\mu x(t-\tau)$. Por ejemplo, el operador

$x' + x$ es creciente, pero al sumar un término que incluya un retardo, es fácil echarlo todo a perder: si tomamos $r > 0$ tal que $-r = \tan(r)$, entonces la función $x(t) = \operatorname{sen}(rt)$ cambia alegremente de signo, a pesar de ser solución del problema

$$x'(t) + x(t) + \frac{r}{\operatorname{sen} r} x(t-1) = 0.$$

Observemos que existe un único de estos valores de r en cada intervalo de la forma $((k - \frac{1}{2})\pi, k\pi)$; cuando k es par, el coeficiente $\frac{r}{\operatorname{sen} r}$ es positivo y tiende a infinito para $k \to \infty$.

La pregunta ahora es si puede ser $I = (0, +\infty)$: uno sospecharía que no, porque eso es lo que ocurre cuando $\tau = 0$. En efecto, si $x \in C_T$ es solución del problema $x' = -ax + \lambda b e^x$, usando que $e^x \geq x + 1$ se obtiene $x' \geq (\lambda b - a)x + \lambda b e^x$, así que no puede haber soluciones si $\lambda b > a$: ¿dónde se ha visto una función periódica cuya derivada sea siempre positiva? Sin embargo, cuando $\tau > 0$ la cuestión es algo más delicada. Pero uno puede observar, por ejemplo, que si $x \in C_T^1$ es solución entonces $x' > -ax$. Esto no es una deducción especialmente brillante, aunque permite decir que $(\ln x)' \geq -a$, es decir,

$$\frac{x(t_1)}{x(t_0)} \geq e^{-\int_{t_0}^{t_1} a(s)\, ds}$$

para $t_0 < t_1$. En particular, por periodicidad podemos tomar t_0 y t_1 a distancia menor que T tales que x alcanza su mínimo en t_1 y su máximo en t_0, de donde

$$x_{\min} \geq c x_{\max}$$

con $c = e^{-\int_0^T a(s)\, ds}$. Luego resulta

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \lambda b(t) e^{x(t-\tau)} \geq -a(t)x(t) + \lambda b(t) e x(t-\tau).$$

En consecuencia,

$$x'(t) \geq -a(t)x(t) + c\lambda b(t) e x(t) = [c\lambda b(t) - a(t)]x(t)$$

y, otra vez, se ve que no hay soluciones cuando λ es grande.

Supongamos ahora que un revoltoso grupo anti-implícita se niega a aceptar nuestra demostración de que hay soluciones para λ chico y exige una prueba alternativa. Rápidos de reflejos, podemos aprovechar que no hay soluciones para λ grande y ofrecer un curioso argumento de "no existencia implica existencia": si no hay soluciones para $\hat{\lambda}$, entonces tiene que haber soluciones para algún $\lambda < \hat{\lambda}$.

Podemos dar una explicación sencilla de esto a partir de uno de esos resultados tipo pasea-perros que vimos junto con Brouwer, conocido como teorema de Rothe: si $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ verifica que $f(x) \neq rx$ para todo $r > 1$ y todo $x \in \partial B$, entonces tiene un punto fijo. En nuestro problema, si T es el operador de antes para $\hat{\lambda}$, el hecho de que no haya soluciones implica que existen x de norma 1 y $r > 1$ tal que $Tx = rx$. Esto quiere decir que

$$(rx)'(t) + a(t)(rx)(t) = \hat{\lambda} b(t) e^{x(t-\tau)}$$

y x es solución para $\lambda = \frac{\hat{\lambda}}{r}$.

La demostración del teorema de Rothe es inmediata si uno usa grado, pero también se deduce directamente del teorema de Brouwer: si f no tiene puntos fijos, definimos $g(x) = \frac{f(x)-x}{|f(x)-x|}$, cuya imagen está contenida en ∂B. Entonces existe $x \in \partial B$ tal que $g(x) = x$, es decir: $f(x) = rx$ con $r = 1 + |f(x) - x| > 1$. Sin embargo, si esto fuera en dimensión infinita, ya nos explicó Kakutani que g no tiene por qué tener puntos fijos y, mucho peor: podría no estar siquiera definida, pues una función continua en la bola cerrada no tiene por qué ser acotada. Pero todos estos inconvenientes se resuelven cuando pedimos que el operador sea compacto:

Proposición 3.2 *(Rothe) Sea X un espacio de Banach y $B \subset X$ la bola unitaria. Si $T : \overline{B} \to X$ es compacto tal que $Tx \neq rx$ para $x \in \partial B$ y $r > 1$, entonces tiene un punto fijo.*

Es claro que podemos reemplazar la bola unitaria por dominios más generales: por ejemplo, si en vez de B ponemos $B_M(0)$, la demostración anterior (ya no en $\mathbb{R}^n$ sino directamente en X) funcionaría exactamente igual, tomando $g(x) = \frac{M[Tx-x]}{\|Tx-x\|}$. A menudo se da una versión ligeramente distinta, conocida como teorema de Schaefer:

Proposición 3.3 *(Schaefer) Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ compacto. Supongamos que existe M tal que para todo $\sigma \in (0,1)$ se cumple:*

$$x = \sigma Tx \quad \Longrightarrow \quad \|x\| < M.$$

Entonces T tiene un punto fijo en $B_M(0)$.

La demostración a partir del teorema de Rothe es clara: si T no tiene puntos fijos, entonces para todo M existen x_M de norma M y $r_M > 1$ tales que $Tx_M = r_M x_M$, es decir, $x_M = \frac{1}{r_M} Tx_M$. También se puede dar una demostración directa definiendo el operador (compacto, claro) $\hat{T} : X \to X$ dado por

$$\hat{T}x := \begin{cases} Tx & \text{si } \|Tx\| \leq M \\ M\frac{Tx}{\|Tx\|} & \text{si } \|Tx\| > M. \end{cases}$$

Como $\hat{T}(X) \subset \overline{B_M(0)}$, se deduce que $\hat{T}$ tiene un punto fijo $x \in \overline{B_M(0)}$. Si x no es punto fijo de T, entonces $\|Tx\| > M$ y vale

$$x = M\frac{Tx}{\|Tx\|} = \sigma Tx,$$

donde $\sigma \in (0,1)$ y $\|x\| = M$, lo que es absurdo. Por supuesto, para el que guste también se puede obtener Rothe a partir de Schaefer: si $T : \overline{B_M(0)} \to X$ es un operador compacto tal que $Tx \neq rx$ para x en el borde y $r > 1$, entonces podemos extenderlo a todo el espacio de la manera más o menos obvia:

$$\hat{T}x := \begin{cases} Tx & \text{si } \|x\| \leq M \\ T\left(M\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } \|x\| > M. \end{cases}$$

La imagen de $\hat{T}$ está acotada porque T es compacto, luego, hay una cota para todas las posibles soluciones del problema $x = \sigma Tx$ con $\sigma \in (0,1)$ y entonces $\hat{T}$ tiene un punto fijo x. Como antes, si x no es un punto fijo de T, entonces $\|x\| > M$ y si definimos $y = M\frac{x}{\|x\|} \in \partial B_M(0)$ se deduce:

$$Ty = x = ry,$$

con $r = T\frac{\|x\|}{M} > 1$, lo que es absurdo.

El teorema de Schaefer nos da un primer "feeling" de los métodos de continuación, ya que se puede interpretar como una homotopía entre la identidad y la función $I - T$, cuyos ceros son los puntos fijos de T. El hecho de que el enunciado se refiera a $\sigma \in (0,1)$ no debería intimidarnos: en primer lugar, es claro que el caso $\sigma = 0$ viene gratis; en segundo lugar, si la cota se arruinase para $\sigma = 1$, entonces habría puntos fijos para todos los gustos y el resultado sería, al decir de Russell, una gran tautología. Como todavía no definimos el grado de Leray-Schauder, por ahora debemos contentarnos con la existencia de soluciones (que no es poco), pero lo que en realidad ocurre es que el grado de $I - T$ es 1. Una situación típica en la que esto se aplica es aquella en la que es fácil conseguir cotas a priori, por ejemplo el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

con f creciente respecto de u, ya sea en el caso escalar o vectorial, es decir:

$$\langle f(t,u) - f(t,v), u - v\rangle \geq 0$$

para todos los valores de $t \in [0,T]$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$. Como antes, el operador $T : v \mapsto u$ se define como la única solución del problema $u''(t) = f(t, v(t))$ con condición de Dirichlet y la igualdad $u = \sigma Tu$ equivale a decir que

$$u''(t) = \sigma f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$

y (pequeño repaso) multiplicando por u e integrando por partes resulta

$$-\int_0^T |u'(t)|^2\, dt = \sigma \int_0^T \langle f(t,u(t)), u(t)\rangle\, dt \geq \sigma \int_0^T \langle f(t,0), u(t)\rangle\, dt,$$

es decir,

$$\int_0^T |u'(t)|^2\, dt \leq \sigma \|u\|_\infty \int_0^T |f(t,0)|\, dt,$$

de donde se deduce, para $\sigma \in (0,1)$, que $\|u\|_\infty < M := T^{1/2}\int_0^T |f(t,0)|\,dt$.

El lector puede intentar ahora buscar soluciones en otro caso para el que las cotas son fáciles: soluciones periódicas de un sistema gradiente

$$x'(t) = \nabla G(x(t)) + p(t)$$

con $p \in C_T$. Para que haya soluciones, hay que pedir alguna condición adicional: por ejemplo, una condición tipo Nirenberg como la que vimos algunas clases atrás.

Pero ya que estamos con los sistemas gradientes, veamos otro ejemplo de aplicación del teorema de Schaefer. Supongamos que ahora los revoltosos de siempre, vencidos en el terreno de las argumentaciones, se oponen también al problema periódico y nos desafían a resolver un problema anti-periódico

$$x'(t) = \nabla G(x(t)) + p(t), \qquad x(t+T) = -x(t)$$

donde G es de clase C^1 y p es continua. Notemos que una solución x necesariamente cumple

$$\nabla G(x(t+T)) + p(t+T) = x'(t+T) = -x'(t) = -\nabla G(x(t)) - p(t),$$

es decir,

$$\nabla G(-x(t)) + p(t+T) = -\nabla G(x(t)) - p(t)$$

de modo que es razonable pedir que p sea anti-periódica y ∇G sea impar. Esto último equivale a decir que G es par, ya que $\nabla[G(-x)] = -\nabla G(-x)$. Además, siempre se puede suponer que $G(0) = 0$.

Aquellos que tengan nostalgia de escuchar la risa loca de Poincaré pueden remitirse al ejercicio 8 de la práctica 2, pero no es cuestión de quedarse amarrado a un recuerdo: vamos a probar la existencia de soluciones por medio del teorema de Schaefer. Por empezar, observemos que se trata de un problema no resonante: en efecto, si definimos el espacio de funciones anti-periódicas

$$X := \{\varphi \in C(\mathbb{R}) : \varphi(t+T) = -\varphi(t)\}$$

con la norma infinito, entonces para toda $\varphi \in X$ el problema $x'(t) = \varphi(t)$ tiene una única solución anti-periódica. En efecto, si escribimos

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)\,ds,$$

la condición $x(T) = -x(0)$ nos dice que $x_0 = -\frac{1}{2}\int_0^T \varphi(s)\,ds$. A esta altura, ya no es sorpresa si afirmamos que el operador $\varphi \mapsto x$ resulta compacto, verificación que queda para el lector.

En resumen, tenemos un operador compacto $\mathcal{T} : X \to X$ dado por $\mathcal{T}(y) = x$, la única solución anti-peripódica del problema $x'(t) = \nabla G(y(t)) + p(t)$. Si ahora suponemos que $x = \sigma\mathcal{T}(x)$ con $\sigma \in (0,1]$, entonces

$$x'(t) = \sigma(\nabla G(x(t)) + p(t))$$

y, como quien no quiere la cosa, multiplicando por x' e integrando se obtiene

$$\int_0^T |x'(t)|^2\,dt = \sigma\left(G(x(t))\Big|_0^T + \int_0^T p(t)x'(t)\,dt\right)$$

Aquí uno podría alarmarse ya que x no es periódica, pero ¡vamos, no hay que perder la cabeza! En efecto, el primer término del lado derecho se anula porque $x(T) = -x(0)$ y G es par. De este modo,

$$\|x'\|^2_{L^2(0,T)} \leq \|p\|_{L^2(0,T)}\|x'\|_{L^2(0,T)}$$

y, en consecuencia, $\|x'\|_{L^2(0,T)} \leq \|p\|_{L^2(0,T)}$. Ahora solo nos queda acotar x en algún punto, para poder usar nuestro archiconocido truco de escribir $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x(t)\,ds$, de donde $\|x\|_\infty \leq |x(t_0)| + T^{1/2}\|x'\|_{L^2}$. Pero esto en realidad ya lo hicimos antes:

$$x(T) - x(0) = \int_0^T x'(t)\,dt \Longrightarrow |x(0)| \leq \frac{1}{2}\int_0^T |x'(t)|, dt \leq \frac{T^{1/2}}{2}\|x'\|_{L^2}.$$

Observación 3.4 *El resultado anterior sigue valiendo si reemplazamos p por una función acotada que puede incluir un retardo, por ejemplo $p(t, x(t), x(t-\tau))$. En tal caso, hay que pedir obviamente que $p(t + T, x, y) = -p(t, -x, -y)$ para todo $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.*

Para concluir, una última observación elemental, dedicada a aquellos que todavía se quedaron con la idea de que el teorema de la función implícita es cosa de pitucos, lamidos y shushetas. Cuando vimos que se podía probar la existencia de soluciones T-periódicas por ejemplo para

$$u''(t) + u(t) + u(t)^3 = p(t)$$

cuando $\|p\|_\infty$ es chico, en realidad podríamos haber esperado un poco y usar directamente el teorema de Schauder. Nuestro argumento en ese entonces fue definir $F(u, p) = u'' + u + u^3 - p$, lo que nos permitió obtener una ramita $u(p), p)$ de soluciones que pasa por $(0, 0)$; para eso, pusimos la condición $T \neq 2k\pi$ a fin de garantizar que la diferencial $D_uF(0, 0)(\varphi) = \varphi'' + \varphi$ es un isomorfismo, justo lo que necesitábamos para definir la aplicación $\mathcal{T} : v \mapsto u$ donde u es la única solución periódica del problema

$$u''(t) + u(t) = p(t) - v(t)^3.$$

Pero en este punto nos dice Schauder: yo anduve siempre en operadores compactos, ¿qué me van a hablar de compacidad? Sabemos que un operador compacto no se lleva bien con la palabra "isomorfismo", aunque esta peli ya la vimos: el operador $L\varphi = \varphi'' + \varphi$ es un isomorfismo si lo miramos de C^2_T en C_T, pero si pensamos su inversa K como un operador de C_T en C_T resulta compacto. De esta forma, $\mathcal{T}(v) = K(N(v))$ es compacto, donde $N(v) = p - v^3$. Y ahora queda todo a pedir de Schauder: si c es tal que $\|\varphi\|_\infty \le c\|L\varphi\|_\infty$ para toda φ, entonces

$$\|\mathcal{T}v\|_\infty \le c\|p - v^3\|_\infty \le c(\|p\|_\infty + \|v\|_\infty^3).$$

Luego, basta fijar r de manera tal que $cr^3 < r$; de esta forma, para $\|p\|_\infty \le \frac{r}{c} - r^3$ se obtiene $\mathcal{T}(\overline{B_r(0)}) \subset \overline{B_r(0)}$.

Observación 3.5 *El planteo del problema en la forma $u = \mathcal{T}u$ lleva a pensar en otra manera de resolverlo por medio del teorema de la función implícita: considerar $\mathcal{T}$ como función de u y p, lo que permite definir $F : C_T \times C_T \times C_T$ dada por $F(u,p) = u - \mathcal{T}(u,p)$. Es un ejercicio simpático calcular $D_uF(0,0)$ y verificar el hecho -más simpático todavía- de que $D_u\mathcal{T}(0,0) = 0$, así que $D_uF(0,0) = I$, uno de los isomorfismos más apreciados por los consumidores. Pero a la luz de este ejemplo, una duda cruel me aqueja y es más fuerte que esta reja que me sirve de prisión: ¿no será posible probar la parte existencial del teorema de la función implícita usando Schauder? Parece bastante claro que en general no vale, aunque sí para operadores de la forma $F(x,y) = y - T(x,y)$ con T compacto. Por simplicidad, supongamos que $(x_0,y_0) = (0,0)$, con $T(0,0) = 0$ tal que $L := I - D_yT(0,0)$ un isomorfismo. La ecuación a resolver es*

$$y = T(x,y) = D_xT(0,0)x + D_yT(0,0)y + R(x,y),$$

es decir,

$$Ly = D_xT(0,0)x + R(x,y).$$

Entonces para x fijo podemos definir $\mathcal{T}y := L^{-1}[D_xT(0,0)x + R(x,y)]$, que es compacto (¡verificar!) y además

$$\|\mathcal{T}y\| \le C_1\|x\| + C_2\|R(x,y)\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos fijar $\delta > 0$ tal que

$$\|R(x,y)\| \le \varepsilon(\|x\| + \|y\|) \qquad \text{para } \|x\| + \|y\| < \delta,$$

de modo que si $\|x\| < r$ y $\|y\| < s$ con $r + s < \delta$, vale

$$\|\mathcal{T}y\| \le (C_1 + \varepsilon C_2)r + \varepsilon C_2 s.$$

En consecuencia, si elegimos $\varepsilon < \frac{1}{C_2}$ y $r < \frac{1-\varepsilon C_2}{C_1+\varepsilon C_2}$, se cumple que $\|\mathcal{T}y\| \le s$. En otras palabras, para cada $x \in B_r(0)$ existe (al menos) un punto fijo $y \in B_s(0)$. La unicidad, claro está, es otra historia.

References

[1] Castro

[2] Fournier-Mawhin

[3] Habets, Pouso.

[4] Ortega.