

Análisis Funcional - 2º cuatrimestre 2020

GUÍA 1

ESPACIOS NORMADOS Y DE BANACH - OPERADORES Y FUNCIONALES ACOTADOS

1. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Probar que existe una norma sobre V .
¿Es V completo con dicha norma?
2. Sean E un espacio vectorial normado y $S \subseteq E$ un subespacio. Probar que:
 - a) $\overline{S}$ es un subespacio.
 - b) Si $S \neq E$ entonces su interior S° es vacío.
3.
 - a) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que toda base algebraica de E es no numerable. Concluir que si E tiene dimensión contable no existe una norma que lo haga un espacio de Banach.
 - b) Demostrar que un espacio de Banach de dimensión infinita tiene subespacios no cerrados.
4. Sea K es un espacio métrico compacto. Probar que $C(K)$ es separable.
5. Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $c_{00} = \{(x_n)_n \in \ell_p : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$. Probar que c_{00} es un subespacio de ℓ_p que no es cerrado. Probar además que si $p < \infty$, entonces es denso y concluir que ℓ_p es separable.
6. Probar que ℓ_∞ no es separable.
7. Sean K un compacto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Considerar en $C(K)$ la norma dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_K |f|^p dx \right)^{1/p},$$

(interpretar la integral con la noción que te sea más cómodo). Probar que $C(K)$ no es completo con dicha norma. ¿Cuál es la completación?

8. Probar que el espacio de las funciones de variación acotada

$$BV([a, b]) = \{f \in C([a, b]) : \sup_{a=a_0 < a_1 < \dots < a_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}$$

con la norma

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_\infty + \sup_{a=a_0 < a_1 < \dots < a_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$

es un espacio de Banach.

9. Sean E un espacio de Banach y S un subespacio cerrado de E . Probar que S , con la norma inducida por E , es un espacio de Banach.
10. Sean V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $B \subset V$ un subconjunto que satisface las siguientes propiedades:
 - $0 \in B$ pero B no contiene ningún subespacio no trivial.

- B es convexo.
- B es balanceado (si $x \in B$ y $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda \cdot x \in B$).
- B es absorbente (para todo $x \in V$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{x}{\lambda} \in B$).
- B es radialmente cerrado (si $\lambda_n x \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq \lambda_n \leq 1$ y $\lambda_n \rightarrow 1$, entonces $x \in B$).

Entonces, si definimos

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B \right\}$$

V resulta un espacio normado, y $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$.

11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Probar que son equivalentes:

- a) E es Banach.
- b) $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es completo.
- c) $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ es completo.
- d) Para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ vale que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge en } E.$$

Definición: Sean E un espacio vectorial y $\|\cdot\|, \|\cdot\|' : E \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) dos normas definidas sobre E . Decimos que las normas son *equivalentes* si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para todo $x \in E$ vale que

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq C_1 \|x\|' \\ \|x\|' &\leq C_2 \|x\| \end{aligned}$$

12. Probar que un espacio vectorial es de dimensión infinita si y sólo si admite dos normas no equivalentes.
13. Sea E un espacio vectorial con normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$. Probar que ambas normas son equivalentes si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucede que x_n converge con $\|\cdot\|$ si y sólo si converge con $\|\cdot\|'$ al mismo límite. Concluir que son equivalentes si y sólo si dan lugar a la misma topología.
14. Sean E un espacio vectorial normado y $F \subseteq E$ un subespacio de dimensión finita. Entonces para cada $x \notin F$ existe $y_x \in F$ que realiza la distancia, es decir

$$\|x - y_x\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

15. *Lema de Riesz:* Sean E un espacio vectorial normado, $F \subsetneq E$ un subespacio cerrado propio y $0 < a < 1$. Entonces existe $x_a \in E$ con $\|x_a\| = 1$ tal que $d(x_a, F) \geq a$.

Sugerencia: Sean $x \in E \setminus F$ y $d = d(x, F) > 0$. Tomar $y_0 \in F$ tal que $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$ y probar que $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$ sirve.

16. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión infinita. Probar que la bola unitaria $B_1(0)$ no es compacta.

17. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados. En $E \times F$, definimos $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$, que hace de $E \times F$ un espacio vectorial normado. Probar que:

- a) Si E y F son espacios de Banach entonces $E \times F$ con la norma anterior es un espacio de Banach.
- b) Si identificamos a E con $E \times \{0\} \subseteq E \times F$ entonces E es cerrado en $E \times F$.
- c) Si $\|\cdot\|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una norma entonces la norma

$$\|(x, y)\|_{\mathbb{R}} = \|(\|x\|_E, \|y\|_F)\|_{\mathbb{R}}$$

es equivalente a la antes definida.

- d) Si E es espacio de Banach y S y T son dos subespacios cerrados tales que $S \cap T = \{0\}$ entonces podemos identificar a $S \times T$ con $S + T$. Probar que la norma antes definida en $S \times T$ es equivalente a la norma de $S + T$ como subespacio de E si y sólo si $S + T$ es cerrado.

Definición: Dado un subespacio S de un espacio de Banach E decimos que S *complementado* (con *complemento* T) si $S + T = E$ y la norma en $S \times T$ es equivalente a la de E .

- e) Probar que si S es complementado entonces es cerrado (y por lo tanto también lo es su complemento).

18. Probar que c_0 es complementado en c . ¿Cuál es su complemento? ¿Sigue siendo complementado en ℓ_{∞} ?

Definición: Sea E un espacio vectorial y S un subespacio. Consideramos la relación de equivalencia de cocientar por S dada por $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in S$. Notamos a E/S como el conjunto de clases de equivalencia. Podemos definir sobre E/S una estructura de espacio vectorial de la siguiente manera: si $[x], [y]$ representan las clases de equivalencia de elementos $x, y \in E$ y λ es un elemento del cuerpo de base, entonces

$$\begin{aligned} [x] + [y] &:= [x + y] \\ \lambda[x] &:= [\lambda x] \end{aligned}$$

19. Sean E un espacio de normado, $S \subset E$ un subespacio.

- a) Probar que si $[x] \in E/S$ es una clase, entonces $\|[x]\| = d(x, S)$ define una norma si y sólo si S es cerrado. Llamamos a dicha norma como *la norma cociente*.
- b) Sea $\Pi : E \rightarrow E/S$ la proyección al cociente $\Pi(x) = [x]$. Asumiendo S cerrado, probar que Π es lineal, que $\|\Pi(x)\| \leq \|x\|$ y que Π es abierta.
- c) Probar que si E es de Banach y S es cerrado, E/S es un espacio de Banach.

20. Probar que en ℓ_{∞}/c_0

$$\|[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$$

Operadores acotados

21. Sean E y F espacios normados, $T : E \rightarrow F$ lineal. Son equivalentes:

- a) T es continuo.
- b) T es continuo en 0.
- c) T es acotado (i.e. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$)

22. Sean E un espacio normado y $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) un funcional lineal no nulo. Son equivalentes:

- a) φ es continua.
- b) $\ker \varphi$ es cerrado.
- c) $\ker \varphi$ no es denso.
- d) Para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $x_n \rightarrow 0$ se tiene que la sucesión $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. *Sugerencia:* Analizar que le sucede a la imagen de una bola centrada en el 0.

23. Sean E un espacio vectorial normado $F \subseteq E$ un subespacio de dimensión finita y S un subespacio cerrado. Probar que $S + F$ es cerrado. Dar un ejemplo de espacio normado E junto con dos subespacios cerrados S y T de modo que $S + T$ no sea cerrado.

24. Sean E y F espacios normados, $T : E \rightarrow F$ lineal. Probar que valen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| < 1\}\end{aligned}$$

25. Decidir si las siguientes funcionales son continuas y hallar sus normas.

a) $\varphi : c \rightarrow \mathbb{C}, \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

b) $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt.$

c) $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi(f) = f'(0).$

d) $\varphi : \ell_1 \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}.$

e) $\varphi : \ell_2 \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}.$

f) $\varphi : \ell_{\infty} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$

g) Fijado $z \in \ell_{p_1}$
 $\varphi : \ell_{p_2} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k.$

26. Sean X un espacio métrico compacto, $x \in X$ e $Y = X \setminus \{x\}$. Probar que el operador $\text{ev}_x : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\text{ev}_x(f) = f(x)$ es un funcional continuo y que $\ker \text{ev}_x = C_0(Y)$. ¿Qué sucede si intercambiamos el rol del punto x con el de un subconjunto cerrado A ? ¿Como se compara esto con el funcional $\lim_{n \rightarrow \infty} : c \rightarrow \mathbb{C}$?

27. **Operadores de Shift:** Sean $1 \leq p \leq \infty$, $S : \ell_p \rightarrow \ell_p$, $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Llamamos a S el operador de *shift* (o shift a derecha) y a B el operador de *coshift* (shift a izquierda o backward shift).

- a) Calcular $\|S\|$ y $\|B\|$.
- b) Probar que S es inyectivo y B es suryectivo.
- c) Probar que $BS = \text{Id}$ y $SB = \text{Id} - K$ en donde $K(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 0, 0, \dots)$.

28. Sean E un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles y $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \rightarrow A$. Probar que $\|A_n^{-1}\| \rightarrow \infty$.

Bonus track: Sea E un espacio de Banach y sea $S, T \in \mathcal{L}(E)$ con T inversible. Probar que si $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, entonces S es inversible y

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

Concluir que los operadores inversibles $\mathcal{L}(E)^\times$ son un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(E)$.

Sugerencia: Probar primero el caso de $T = \text{id}$ y determinar $S + \text{id}$ como una serie.

29. **Operadores de Multiplicación:** Sean X un espacio de medida y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Dada $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ definimos $M_\varphi(f) = \varphi f$.

- a) Probar que si $\varphi \in L^\infty(X)$ entonces $M_\varphi : L^p(X) \rightarrow L^p(X)$ es un operador acotado. En caso de que la medida de X sea positiva y σ -finita probar el recíproco.
- b) Probar que si $\varphi \in L^\infty(X)$ y $\varphi \neq 0$ en casi todo punto, entonces M_φ es inyectiva. Además, probar que si $1/\varphi \in L^\infty(X)$ entonces M_φ es un isomorfismo.

30. **Operadores integrales:** Sea X un espacio de medida, $k \in L^2(X \times X)$. Definimos $K : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ dado por

$$(Kf)(s) = \int_X k(s, t) f(t) dt.$$

Probar que $K \in \mathcal{L}(L^2(X))$ y que $\|K\| \leq \|k\|_2$