

ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2014
Práctica 2 - Transformadas de Fourier y de Hilbert

Ejercicio 1. Mostrar que existe una función $f \in L^1[-\pi, \pi]$ tal que Hf no pertenece a $L^1[-\pi, \pi]$. Sugerencia: Probar que $H : L^1[-\pi, \pi] \rightarrow L^1[-\pi, \pi]$ es no acotado y usar después gráfico cerrado.

Ejercicio 2. Notación: dada f medible en \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$, y $a > 0$, notamos los operadores de traslación, dilatación y reflexión como:

$$\begin{aligned}\tau^y(f)(x) &= f(x - y) \\ \delta^a(f)(x) &= f(ax) \\ \tilde{f}(x) &= f(-x)\end{aligned}$$

Probar que dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α un multiíndice, y $a > 0$, valen las siguientes propiedades

- $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$
- $\widehat{f + g} = \widehat{f} + \widehat{g}$
- $\widehat{bf} = b\widehat{f}$
- $\widehat{\tilde{f}} = \widehat{f}$
- $\widehat{\tau^y(f)}(\xi) = e^{-2\pi iy \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$
- $\widehat{(e^{2\pi ix \cdot y} f(x))}(\xi) = \tau^y(\widehat{f})(\xi)$
- $\widehat{\delta^a(f)} = a^{-n} \delta^{a^{-1}}(\widehat{f}) = (\widehat{f})_a$
- $\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$
- $\widehat{(\partial^\alpha \tilde{f})}(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f(x)) \widehat{f}(\xi)$
- $\widehat{f} \in \mathcal{S}$
- $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$
- $\widehat{f \circ A}(\xi) = \widehat{f}(A\xi)$, para toda matriz A ortogonal y todo vector columna ξ .

Ejercicio 3. *Desigualdad de Hausdorff-Young*

Probar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}} \leq C \|f\|_{L^p}$$

(se puede ver que $C = 1$ si en lugar del teorema de Marcinkiewicz se usa otro método de interpolación).

Ejercicio 4. *Lema de Riemann-Lebesgue*

Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $|\widehat{f}(\xi)| \rightarrow 0$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Ejercicio 5. Sean $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ y

$$g = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Probar que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \quad \text{y} \quad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \right)^2.$$

Ejercicio 6. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que para algún $0 < \alpha < 1$

$$\widehat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right) \quad (|\xi| \rightarrow \infty).$$

Probar que entonces f satisface una condición de Hölder de orden α , es decir,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^\alpha$$

para algún $M > 0$ y para todo $x, h \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: usar la fórmula de inversión de Fourier para escribir $f(x+h) - f(x)$ como una integral que involucre a \hat{f} y estimar por separado la integral para $|\xi| \leq 1/|h|$ y $|\xi| \geq 1/|h|$).

Ejercicio 7. Probar que la transformada de Fourier de una función radial es radial, y que los productos y convoluciones de funciones radiales son radiales.

Ejercicio 8. *Ejemplo de funciones de soporte compacto en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*

- Sean $a < b$ y f tal que $f(x) = 0$ si $x \leq a$ o $x \geq b$ y

$$f(x) = e^{-1/(x-a)} e^{-1/(b-x)} \quad \text{si } a < x < b.$$

Mostrar que f es infinitamente diferenciable en \mathbb{R} .

- Probar que existe una función F infinitamente diferenciable en \mathbb{R} tal que $F(x) = 0$ si $x \leq a$, $F(x) = 1$ si $x \geq b$ y F es estrictamente creciente en $[a, b]$.
- Sea $\delta > 0$ suficientemente chico para que valga $a + \delta < b - \delta$. Probar que existe una función g infinitamente diferenciable en \mathbb{R} tal que $g(x) = 0$ si $x \leq a$ o $x \geq b$, $g = 1$ en $[a + \delta, b - \delta]$ y g es estrictamente monótona en $[a, a + \delta]$ y $[b - \delta, b]$.

Ejercicio 9. *Autovalores de la transformada de Fourier*

- Probar que si $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, entonces $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.
- Probar que los autovalores de la transformada de Fourier son $-1, 1, -i, i$. (Sugerencia: tener el cuenta el ítem anterior y probar que se pueden elegir a, b, c, d apropiados para que $xe^{-\pi x^2}$, $(a + bx^2)e^{-\pi x^2}$, $(cx + dx^3)e^{-\pi x^2}$ sean autofunciones).

Ejercicio 10. *Demostración alternativa del teorema de Weierstrass*

Sean L_n los núcleos de Landau, dados por

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde c_n es tal que $\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x) dx = 1$. Probar que si f es una función continua soportada en $[-1/2, 1/2]$, entonces $(f * L_n)(x)$ es una sucesión de polinomios en $[-1/2, 1/2]$ que converge uniformemente a f . (Sugerencia: probar primero que $c_n \geq 2/(n+1)$).

Ejercicio 11. Probar que

$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$$

Ejercicio 12. Probar que

$$H(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi} e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Ejercicio 13. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $Hf \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\int f = 0$

Ejercicio 14. Sea T un operador acotado en $L^2(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes propiedades:

- T conmuta con traslaciones.
- T conmuta con dilataciones positivas.
- T anticonmuta con la reflexión $f(x) \rightarrow f(-x)$.

Probar que entonces T es la transformada de Hilbert por una constante.