1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA:

Análisis Armónico

Examen - 30/10/2014

---

1. a) Considere en $\mathbb{Z}$ la medida atómica $\mu(\{k\}) := \frac{1}{|k|^2}$. Probar que para toda $f \in L^1[-\pi,\pi]$ se tiene

$$\mu\{k \in \mathbb{Z} : |k\widehat{f}(k)| > \lambda\} \leq \frac{4\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Sugerencia: Para $\alpha > 0$, mostrar que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\{x>\alpha\}}(n)\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{\alpha}$$

(puede ser útil la desigualdad $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, si $n \geq 2$.)

b) Probar que, para $1 < p \leq 2$, existe $C = C(p)$ tal que si $f \in L^p[-\pi,\pi]$, entonces

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p |k|^{p-2}\right)^{1/p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

2. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-(y^2-2xy)} dy = 0.$$

Probar que $f \equiv 0$.

Sugerencia: Multiplique la igualdad anterior por una función adecuada.

3. a) Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene $(\widehat{f})^{(k)}(0) = 0$. Probar que $f \equiv 0$.

b) Mostrar que

$$H(C_0^\infty(\mathbb{R})) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{0\},$$

donde H denota la transformada de Hilbert.

4. Sea $\Omega(x,\theta)$ una función en $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ cumpliendo

- $\Omega(x,-\theta) = -\Omega(x,\theta)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in S^{n-1}$;
- $\int_{S^{n-1}} \Omega(x,\theta)d\theta = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\sup_x |\Omega(x,\theta)| \in L_1(S^{n-1})$.

Probar que la expresión

$$T_\Omega(f)(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(x,y')}{|y|^n} f(x-y)dy$$

tiene sentido para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y que T_Ω resulta un operador lineal acotado en $L_p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Justifique todas sus respuestas.