

Análisis 1 - Alimentos - 2° cuatrimestre 2020 (virtual)

PRÁCTICA 5

POLINOMIO DE TAYLOR, INTEGRACIÓN Y MODELOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 y el resto correspondiente en $x_0 = 0$ para cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \text{sen}(x)$

c) $f(x) = \text{cos}(x)$

e) $f(x) = \ln(1 - x)$

e) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

f) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

g) $f(x) = \arctan(x)$

h) $f(x) = (1 + x)^x$

i) $f(x) = x \ln(1 + x)$

2. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , se define su Laplaciano $\Delta f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Decimos que f satisface la ecuación de Laplace (o que f es una *función armónica*) en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si $\Delta f \equiv 0$ en U . Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determinar U en cada caso:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

b) $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(3z) + 4y$

3. Dado un campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , si $F = (f_1, f_2, f_3)$ se define la *divergencia* de F como la función escalar $\text{div}(F) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

También se usa la notación $\nabla \cdot F = \text{div}(F)$ para la divergencia ¿por qué?

Probar que para toda $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 ,

- a) la divergencia de su campo gradiente es igual a su Laplaciano, es decir

$$\nabla \cdot \nabla f = \Delta f,$$

y por eso se usa la notación $\Delta = \nabla^2$ para el Laplaciano.

- b) la diferencial del su campo gradiente es igual a su matriz Hessiana, es decir

$$D(\nabla f) = Hf.$$

4. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado, y escribir la fórmula del resto.

- a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$
- b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$
- c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$
- d) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$
- e) $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ en $(1, \pi)$
- f) $f(x, y) = e^x \text{sen}(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$
- g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$
- h) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$
- i) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$

5. Sea $f(x, y) = xe^y$.

- a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$.
- b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 0,02)$. Estimar el error cometido.

6. Sea $f(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , tal que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$P(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular $\nabla g(1, -1)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(1, 1) = 0, \quad \nabla f(1, 1) = (0, 2) \quad \text{y} \quad Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = \text{sen}(f(x, y)) - 2xy + x^2$, calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $P = (1, 1)$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(2, 1) = 1$ y

$$xyf(x, y)^3 + y^2e^{x-2f(x, y)} = 3$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (2, 1)$.

Integrales y área

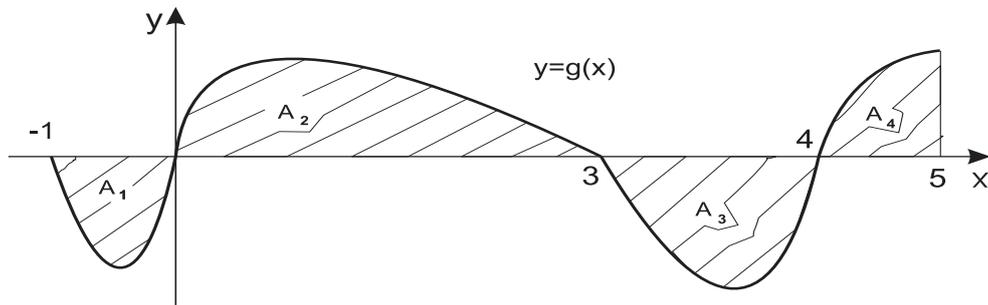
9. En cada caso, calcule el área de la región encerrada por las curvas (sugerencia: haga los gráficos).

- a) $y = x; y = x^2 - 1$
- b) $y = x^3; y = x$
- c) $y = x^{1/3}; x = 0; y = 1$
- d) $y = x^3 - 12x; y = x^2$
- e) $y = x^{1/2}; y = x - 2; x = 0$
- f) $y = x^{1/2}; y = x - 2; y = 0$.

10. Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x) + |\text{sen}(x)|$

- a) Halle la expresión explícita de $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$
- b) ¿Es cierto que $F : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente?

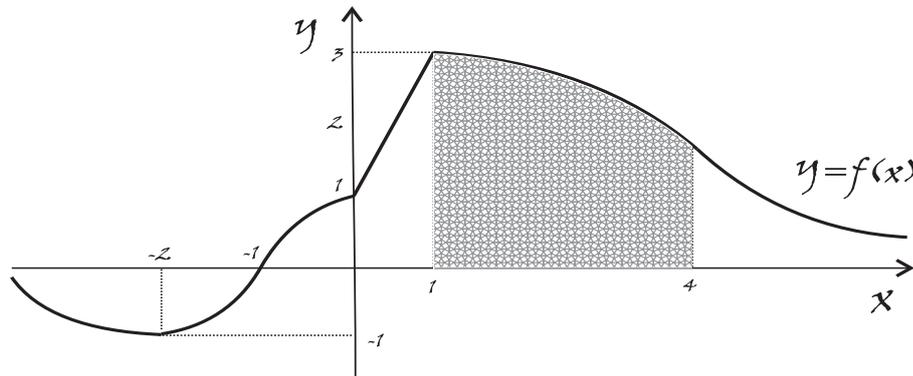
11. De acuerdo al siguiente gráfico de $y = g(x)$,



Se conocen las áreas sombreadas: $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 2$, $A_4 = 1$. Usando solo estos datos, calcular

- a) $\int_0^5 g(x) dx$. b) $\int_{-1}^5 g(x) dx$.
- c) $\int_3^4 g'(x) dx$. d) $\int_0^3 x g'(x) dx$.

12. Considere el gráfico siguiente: (el tramo de f entre $x = 0$ y $x = 1$ es rectilíneo, y el gráfico entre $x = -2$ y $x = 0$ es simétrico)



- a) Sabiendo que el área de la región sombreada vale 7, calcule $\int_{-2}^4 f(x) dx$
- b) Se sabe que $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{3}{4}$. Halle el área encerrada por el eje x y el gráfico de f entre $x = -2$ y $x = 4$
- c) Si los dos cálculos anteriores le dieron el mismo resultado, está pensando mal el problema ¿por qué?

13. Halle el área de la región comprendida entre la curva $y = x\sqrt{2x+3}$ y el semieje negativo de las x .

14. Calcule el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 e^{3x+1}$ y $g(x) = 4 e^{3x+1}$.

15. Calcule el área encerrada por los gráficos de $f(x) = x \ln(x) + x^2 \sin^2(x)$ y $g(x) = x + x^2 - x^2 \cos^2(x)$ en el intervalo $[1, e^2]$ (se sugiere calcular $f - g$ y $g - f$ antes de integrar)

Ecuaciones diferenciales y modelos

16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas:

- a) $y' = ky$, $y(0) = 1$ con $k \in \mathbb{R}$ fijo
- b) $y' = 1/y$, $y(0) = 1$ ¿Qué dominio tiene $y(x)$?
- c) $y' = 1/y$, $y(0) = -1$ ¿Qué dominio tiene $y(x)$?
- d) $y' = \frac{2xy}{1+x^2}$, $y(1) = 3$
- e) $y' = 3x^2e^{-y}$, $y(0) = 1$
- f) $y' = y/x$, $y(1) = 1$ ¿Qué dominio tiene $y(x)$?
- g) $y' = e^{2x+y}$, $y(0) = 0$
- h) $xy' = y^2 + 1$, $y(1) = 1$
- i) $xy' = y^2 - 1$, $y(1) = 2$
- j) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$
- k) $y'' = -y$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$
- l) $xy^2y' = (x+1)^2$, $y(1) = 0$. ¿Qué dominio tiene $y(x)$?
- m) $x \operatorname{sen}^2(y)y' = (x+1)^2$, $y(1) = 0$.

17. La segunda ley de Newton postula que un objeto que se mueve bajo la acción de una fuerza F obedece la ecuación

$$mV'(t) = F(V(t))$$

donde m es la masa del objeto y v su velocidad instantánea. Si la fuerza F es constante y no nula, y $P(t)$ denota la posición del objeto (con $P' = V$), probar que P varía cuadráticamente con el tiempo. ¿Qué pasa si la fuerza es F es nula?

18. Un objeto cambia su temperatura de acuerdo a la siguiente ley

$$y'(t) = -\lambda(y(t) - K)$$

donde K es la temperatura del ambiente y λ es una constante de proporcionalidad que depende del ambiente. Calcular la solución de la ecuación y ver que la temperatura del objeto tiende a la temperatura ambiente. ¿Qué diferencia hay si λ es positivo o negativo?

19. Un tanque mezclador tiene 50 litros de una solución compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Se le comienza a agregar agua a una velocidad de 4 litros por minuto. Mientras se mezcla dentro del tanque, este deja salir por debajo líquido a una velocidad de 5 litros por minuto, para usar la mezcla en otro proceso. Después de 10 minutos ¿cuánto alcohol habrá en el tanque?

Ayuda: si $y(t)$ es la cantidad de litros de alcohol en el tanque en el instante t , sabemos que $y_0 = 5$, y que $y' = -\text{LO QUE SALE DE ALCOHOL}$. El tanque pierde 1 litro de mezcla por minuto, la cantidad de líquido total luego de tiempo t es $50 - t$. Entonces lo que pierde de alcohol por minuto es la proporción $5/(50 - t)$ de lo que hay.

20. La población de conejos crece proporcionalmente a la cantidad de conejos que hay. Si la constante de proporción es k y el número de conejos en tiempo t es $N(t)$, la ecuación que gobierna este crecimiento es

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

Resolver la ecuación para una población inicial de conejos $N(0) = 2$. ¿Cuántos conejos habrá luego de 10 unidades de tiempo, si $k = 1$?

21. El matemático Pierre Verhulst consideró que una población concreta no puede crecer indefinidamente de forma exponencial, por la escasez de recursos. Propuso entonces una evolución de la población gobernada por

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{M} \right).$$

donde M es el máximo de población posible, por la limitación mencionada.

- a) Resolver la ecuación para $N(0) = 2$ (expresarla en términos de k, M).
- b) Probar que si $k > 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = M$.
- c) Graficar la solución para $k = 2, M = 50$.

La solución de esta ecuación diferencial se conoce como *ecuación logística*.