ALGEBRA LINEAL - Práctica N°8 - Segundo cuatrimestre de 2020

Espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ únicamente.

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle\,,\rangle$ un producto interno sobre V. Probar:

i) $\langle x,\, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

ii) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,.\,\langle x, y\rangle$

iii) $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \; \forall\, x \in V \;\Rightarrow\; y = z$

Ejercicio 2. Sea $(V, \langle\,,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\;\; \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\;\; \Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K,\;\; \Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\;\; \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\;\; \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1+i).x_1.\overline{y}_2 + (1+i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\;\; \Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1.\overline{y}_2 + i.x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\;\; \Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1+b).x_3.y_3$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle\,,\rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\;\; \langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle\,,\rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\;\; \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$

iii) $\langle\,,\rangle : K^n \times K^n \to K,\;\; \langle x, y\rangle = \overline{y}.\,Q^*.Q.\,x^t$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible.

iv) $\langle\,,\rangle_T : V \times V \to K,\;\; \langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$
donde V y W son espacios vectoriales sobre K, $\langle\,,\rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo.

Ejercicio 6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \ldots, X^n\}$.

Ejercicio 7.

i) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 3. iii) con $K = \mathbb{R}$.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 3. vi).

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

i) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.

ii) Hallarlo en los casos

a) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
b) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

Ejercicio 9. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = <(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)>$ para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = <(1, 2, 1)>$ para el producto interno definido por
$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$.

iii) $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = <(i, 1, 1), (-1, 0, i)>$
para el producto interno $\langle , \rangle_T$ definido en el Ejercicio 5. iv) con $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$
$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} . x^t$ y $\langle , \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^3$.

iv) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \;/\; \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

Ejercicio 10.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

iii) Hallar el punto de S_4 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

Ejercicio 11. Se define $\langle , \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ como $\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big). g\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

i) Probar que $\langle , \rangle$ es un producto interno.

ii) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

Ejercicio 12.

i) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = <1>$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = <1, x, x^2, x^3, \mathrm{sen}(\pi x)>$.

Ejercicio 13. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\, ,\rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Ejercicio 14. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 + (1-i).x_2, x_2 + (3+2i).x_3, x_1 + i.x_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(p) = p'$, $\quad$ donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\,dx$.

v) $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $\quad f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$, $\quad$ donde $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$.

vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\quad \mu_f(p) = f.p$, $\quad$ donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$.

Ejercicio 15. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean f_1 y f_2 endomorfismos de V y sea k un escalar. Probar:

i) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$

ii) $(k.f_1)^* = \overline{k}.f_1^*$

iii) $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$

iv) Si f_1 es un isomorfismo, entonces f_1^* es un isomorfismo y $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$

v) $((f_1)^*)^* = f_1$

vi) $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

Ejercicio 16. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}(f))^\perp$ y $\mathrm{Nu}(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que f sea autoadjunta para $\langle\, ,\rangle$.

Ejercicio 18. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 19.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

ii) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

i) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

ii) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

a) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall\, v \in V$. En particular, $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^*)$.

b) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ f - \lambda.\, id_V$ es normal.

c) Si v es un autovector de f de autovalor λ, entonces v es un autovector de f^* de autovalor $\overline{\lambda}$.

d) $E_\lambda = \{v \in V \,/\, f(v) = \lambda.v\}$ es f^*-invariante.

iii) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.
(Sugerencia: observar que $(E_\lambda)^\perp$ es f-invariante y f^*-invariante).

iv) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 21. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 24. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^2.$$

i) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

ii) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 25. *Cálculo de volúmenes.* Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle\, ,\rangle$.
El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula "base por altura", o sea, $\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|$.
El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ sería "área de la base por altura", o sea, $\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\|$.
Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \ldots, v_k)$ sería $\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\| \ldots \|p_{<v_1,\ldots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|$.
Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \ldots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \operatorname{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_k)) = \operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\ldots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que *el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$.*

i) Dados $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define $G(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ como $G(v_1, \ldots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Probar:

   a) Si $v_k \in\ < v_1, \ldots, v_{k-1} >$, entonces $\det(G(v_1, \ldots, v_k)) = 0$.
   b) Si $v_k \in\ < v_1, \ldots, v_{k-1} >^\perp$, entonces $\det(G(v_1, \ldots, v_k)) = \det(G(v_1, \ldots, v_{k-1})).\, \|v_k\|^2$.
   c) $\det(G(v_1, \ldots, v_k)) = \det(G(v_1, \ldots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\ldots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|^2$.

ii) Probar que, si $v_1, \ldots, v_k$ son vectores linealmente independientes, $(\operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \ldots, v_k))$.

iii) Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_n$. Probar que $G(v_1, \ldots, v_n) = A^t.\, A$. Deducir que $\operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_n)) = |\det(A)|$.

iv) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

v) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, probar que $\operatorname{vol}(P(f(v_1), \ldots, f(v_n))) = |\det f|.\, \operatorname{vol}(P(v_1, \ldots, v_n))$.