

K-morfismos: Dados  $E/k$ ,  $F/k$  extensiones,  
 $\sigma: E \rightarrow F$  es un K-morfismo si es un morfismo de cuerpos  
y  $\sigma|_k = \text{id}_k$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & F \\ & \searrow & \swarrow \\ & k & \end{array}$$

Prop.  $\alpha, \beta$  algebraicos sobre  $k$ ,

$$\exists \sigma: k(\alpha) \xrightarrow{k} k(\beta) \iff m_{\alpha, k} = m_{\beta, k}$$

$$\alpha \longmapsto \beta$$

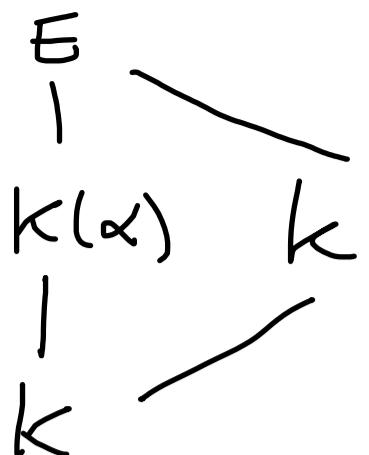
Obs.  $\sigma: E \xrightarrow{k} F$  induce  $\sigma: E[x] \rightarrow F[x]$  morf  
de anillos (moro); y se tiene que si  $f \in k[x]$ ,  
 $\alpha \in E$ , entonces  $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$ .

Ej. Sea  $f \in k[x]$  irreducible <sup>con raíces simples</sup> y sea  $E$  su cdd  
sobre  $k$ . Para  $\alpha \in E$ , raíz de  $f$ , sea

$$\Gamma(\alpha) := \bigtimes \{ \text{raíces de } f \text{ en } k(\alpha) \}.$$

a)  $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$ ,  $\forall \alpha, \beta$  raíces de  $f$

b) Si  $d = \bigtimes \{ \text{morfos } k(\alpha_i) \}$ ,  $\alpha_i$ , raíz de  $f$ , entonces  
d.  $\Gamma = g\Gamma(f)$



Supongamos:

$$k(\alpha) \supseteq \{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{\Gamma(\alpha)}\} =: R(\alpha)$$

$$k(\beta) \supseteq \{\beta, \beta_2, \dots, \beta_{\Gamma(\beta)}\} =: R(\beta)$$

Sea  $\sigma: k(\beta) \xrightarrow{K} k(\alpha)$

$$\beta \longmapsto \alpha$$

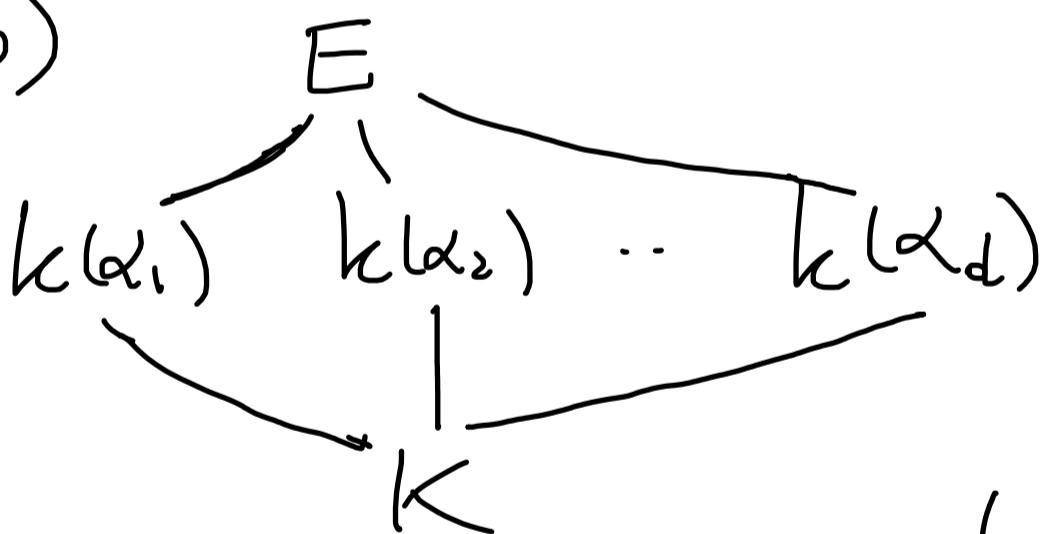
Entonces  $\sigma(\beta_j) \in k(\alpha)$  y más aún,  $\sigma(\beta_j) = \alpha_i$ ,

para algún  $i$ , pues  $\sigma(\beta_j)$  también es raíz de  $f$

y como  $\sigma$  es iny, resulta  $\Gamma(\beta) \leq \Gamma(\alpha)$

Si métricamente  $\Gamma(\alpha) \leq \Gamma(\beta)$  ✓

b)



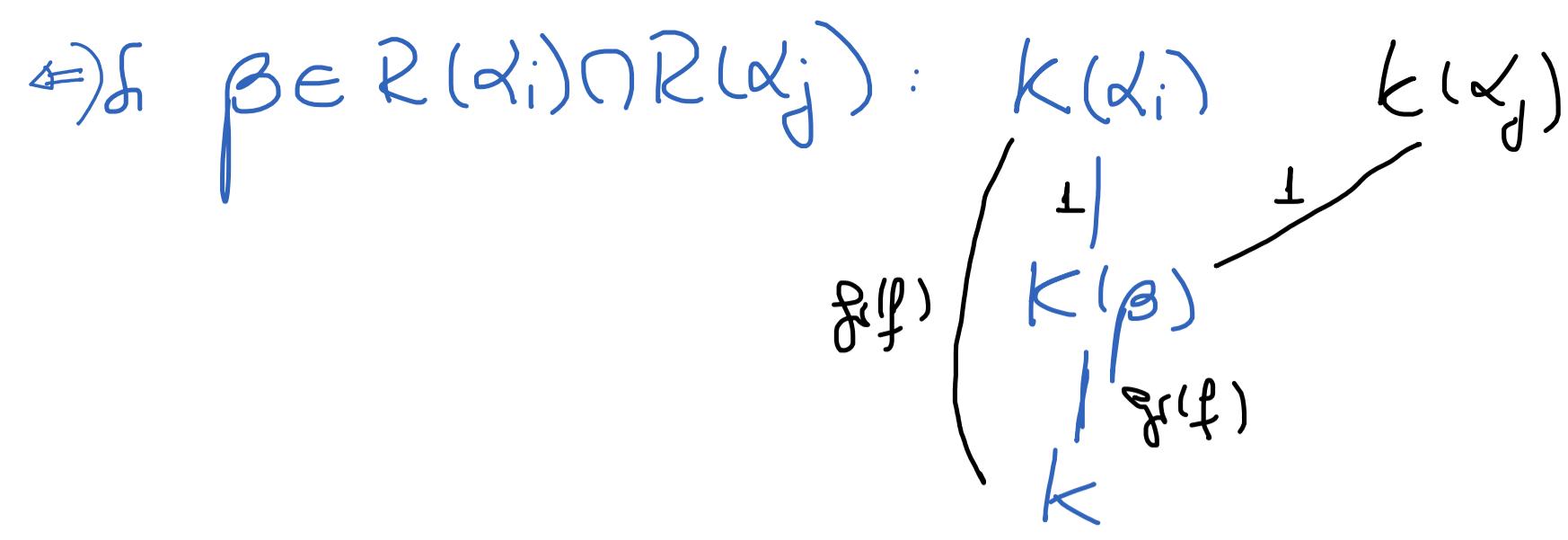
$$g_f(f) = \# \{\alpha_i\} = \# \left( \bigcup_{i=1}^d R(\alpha_i) \right)$$

$$\sum_{i=1}^d \# R(\alpha_i) = \sum_{i=1}^d \Gamma = d \cdot \Gamma$$

$$\text{Pues. } k(\alpha_i) \neq k(\alpha_j) \iff R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j) = \emptyset$$

En efecto;  $\forall i, j: k(\alpha_i) = k(\alpha_j) \iff R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j) \neq \emptyset$

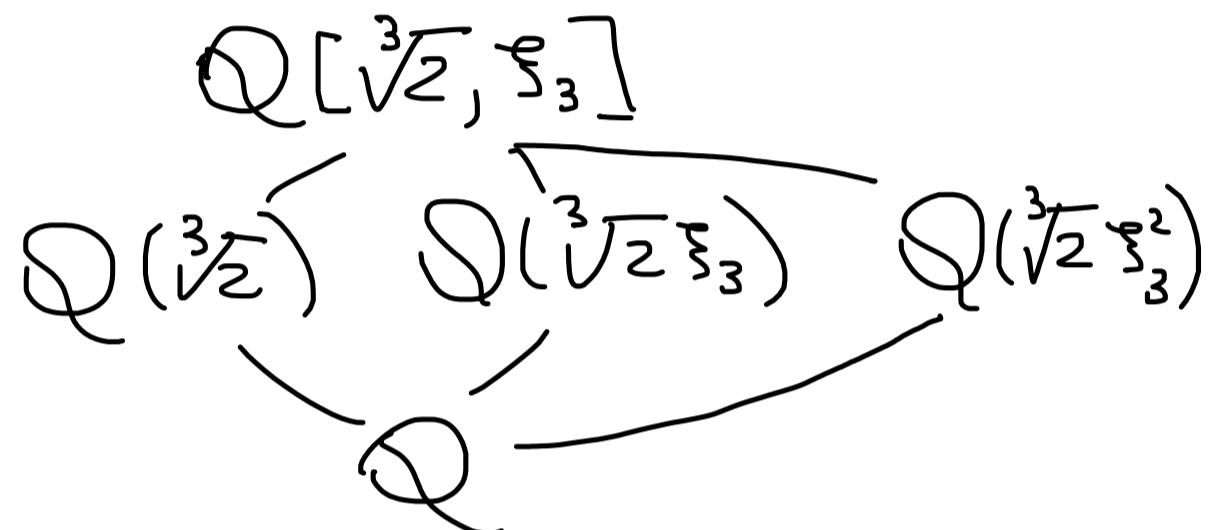
$$\Rightarrow \alpha_i \in R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j)$$



$$\Rightarrow k(\beta) = k(\alpha_i) = k(\alpha_j)$$

Ej:  $f = x^3 - 2$ :

Aca:  $\Gamma = 1$



Prop:  $\sqrt[3]{2} \notin Q(\sqrt[3]{3})$

Sup. que  $\sqrt[3]{2} \in Q(\sqrt[3]{3})$ .  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{3^2}$ , con  
 $a, b, c \in Q$ .

$$E = Q(\xi_3)(\sqrt[3]{3})$$

$$K := Q(\xi_3) \quad Q(\sqrt[3]{3})$$

Sea  $\sigma: E \xrightarrow{k} E$

$$\sqrt[3]{3} \mapsto \sqrt[3]{3}\xi_3$$

(es un  $k$ -mrf, pues.  
 $\forall \sqrt[3]{3}, k = x^3 - 2$ )

Aplico  $\sigma$  a (1):  $\sqrt[3]{2}\xi_3^i = a + b\sqrt[3]{3}\xi_3 + c\sqrt[3]{3^2}\xi_3^2$   
 con  $0 \leq i \leq 2$ , pues  $\forall \sqrt[3]{2}, k = x^3 - 2$

Aplicar  $\sigma$  a (2) :

$$\sqrt[3]{2} \xi_3^{2i} = a + b \sqrt[3]{3} \xi_3^2 + c \sqrt[3]{3^2} \xi_3$$

Haga (1) + (2) + (3) y ... (ejercicio)

Exteusiones Normales:

Def  $N/K$  es normal si es algebraica y  $\forall h \in K[x]$  irreducible, si  $h$  tiene una raíz en  $N$ , tiene todas.

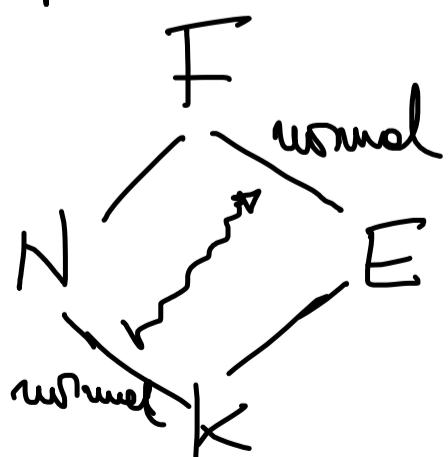
Prob. Sea  $N/K$  algebraica. Son equivalentes

1)  $N/K$  es normal

2) Si  $\delta: N \xrightarrow{K} \bar{K} \Rightarrow \delta(N) \subseteq N$

3)  $N$  es celd de una fibra de polinomios de  $K$

Prob.



$$N \mid E \mid K$$

- $N/K$  normal  $\Rightarrow N/E$  normal
- $N/E, E/K$  normales  $\cancel{\Rightarrow} N/K$  normal

Ej.  $[N : \mathbb{Q}] = 2 \Rightarrow N/\mathbb{Q}$  es normal (Práctica)

g:  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \notin \mathbb{Q}^n$ .

$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})/\mathbb{Q}$  es normal  $\Leftrightarrow m$  es  $\frac{pm}{q^n}$  y  
 $m \in \mathbb{N}^{\frac{n}{2}}$

Dem.  $\Leftarrow$ )  $m = a^{\frac{n}{2}}$ , con  $a \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (\sqrt[n]{m})^2 = a \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow [E : \mathbb{Q}] = 2 \Rightarrow \text{es normal} \checkmark$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$  sea  $f = \text{an}_x, \mathbb{Q}$   
|  $\Rightarrow f \mid x^n - m$   
 $\mathbb{Q}$

Porque  $E/\mathbb{Q}$  es normal,  $f$  tiene todos sus raíces en  $E$ . Pero como  $E \subseteq \mathbb{R}$ :

$$f = x - \sqrt[n]{m} \quad \text{No: } \sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$$

$$f = (x - \sqrt[n]{m})(x + \sqrt[n]{m}) = x^2 - (\sqrt[n]{m})^2$$

luego:  $f = x^2 - (\sqrt[n]{m})^2$  y  $m$  es par; y  
 $(\sqrt[n]{m})^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = a^{\frac{n}{2}}$   $\blacksquare$

$$\text{Ej. } \mathbb{Q}(\sqrt[15]{17})/\mathbb{Q} \quad \underline{\text{No}}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})/\mathbb{Q} \quad \underline{\text{No}}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[10]{32})/\mathbb{Q} \quad \underline{\text{Sí}}$$

$$(\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[2]{2})$$

~~Ej:~~  $K$  campo,  $\text{car}(K) \neq 2$ ,  $f \in k[x]$ ,  
 $\text{gr}(f) = 3$ , irreducible,  $f = (x-a)(x-b)(x-c)$ ,  
 $a, b, c \in \overline{K}$ .

$$k[a, b, c] \quad K[a, b, c] = k[a, b]$$

$$d \mid \text{Pues } a+b+c \in K$$

$$k[a] \quad \text{Además. } (x-b)(x-c) = \frac{f}{(x-a)} \in k[a][x]$$

$$3 \mid K \quad \Rightarrow \quad \mu_{b, k[a]} \mid (x-b)(x-c)$$

$$\Rightarrow \text{gr}(\mu_{b, k[a]}) = 1 \circ 2$$

Obs:  $d = 1 \circ 2$ .

$$\text{Luego } [k[a, b, c] : k] = 3 \circ 6$$

Prob.:  $k(a)/k$  es normal  $\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \in k$

(Def).  $\Delta := (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$  "discriminante"  
 $\in k$  ("Res(f, f')")

Demo.:  $\text{m}_{\sqrt{\Delta}, k} = x - \sqrt{\Delta}$  ó  $x^2 - \Delta$

$k[a, b, c] \Rightarrow$  Pr hipótesis

$\begin{array}{c} k[a, b, c] \\ | \\ k[a, \sqrt{\Delta}] \\ | \\ k[a] \\ | \\ k \end{array} \quad b, c \in k[a]$

$$\Rightarrow k[a, b, c] = k[a, \sqrt{\Delta}] = k[a]$$

$\Rightarrow$   $\begin{array}{c} k[a] \\ | \\ k[\sqrt{\Delta}] \\ | \\ k \end{array}$  ~~15~~

$\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \in k \Rightarrow k[a, \sqrt{\Delta}] = k[a],$

que  $b, c \in k[a]$ , pues en tal caso

$k[a] = k[a, b, c]$ . Pero:

$$a+b+c \in k \Rightarrow b+c \in k[a]$$

$$b-c = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{(a-b)(c-a)} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{a(b+c) - a^2 - bc} \in K[a]$$

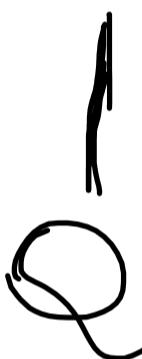
Pues  $bc \in k[a]$ , porque  $abc \in k$

Luego  $\left\{ \begin{array}{l} b+c \in k[a] \\ b-c \text{ " " } \end{array} \right. \Rightarrow b, c \in k[a]$



Ej.

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$



no es normal

$$(\Rightarrow \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q})$$