<u>K-morfismos</u>: Dadas E/K, F/K extensiones,

$\sigma: E \to F$ es un K-morfismo si es un morfismo de cuerpos y $\sigma|_K = id_K$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

<u>Prop</u>. α, β algebraicos sobre K,

$$\exists\, \sigma: K(\alpha) \xrightarrow[K]{} K(\beta) \iff m_{\alpha,K} = m_{\beta,K}$$
$$\alpha \longmapsto \beta$$

<u>Obs</u>. $\sigma: E \xrightarrow[K]{} F$ induce $\sigma: E[x] \to F[x]$ morf de anillos (mono); y se tiene que si $f \in K[x]$; $\alpha \in E$, entonces: $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$.

<u>Ej</u>. Sea $f \in K[x]$ irreducible con raíces simples y sea E su cdd sobre K. Para $\alpha \in E$, raíz de f, sea

$$\Gamma(\alpha) := \#\{\text{raíces de } f \text{ en } K(\alpha)\}.$$

a) $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta) =: \Gamma$, $\forall\, \alpha, \beta$ raíces de f

b) Si $d = \#\{\text{cuerpos } K(\alpha_i)\}$, α_i raíz de f, entonces
$$d \cdot \Gamma = gr(f)$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
K(\alpha) \arrow[d, no head] & & K(\beta) \arrow[dll, no head] \\
K & &
\end{tikzcd}$$

Supongamos:

$$K(\alpha) \supseteq \{\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{r(\alpha)}\} =: R(\alpha)$$

$$K(\beta) \supseteq \{\beta, \beta_2, \dots, \beta_{r(\beta)}\} =: R(\beta)$$

Sea
$$\sigma : K(\beta) \xrightarrow[K]{} K(\alpha)$$
$$\beta \longmapsto \alpha$$

Entonces $\sigma(\beta_j) \in K(\alpha)$ y más aún, $\sigma(\beta_j) = \alpha_i$ para algún i, pues $\sigma(\beta_j)$ también es raíz de f

y como σ es iny, resulta $r(\beta) \leq r(\alpha)$

Simétricamente $r(\alpha) \leq r(\beta)$ ✓

b)

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dll, no head] \arrow[d, no head] \arrow[drr, no head] & & \\
K(\alpha_1) \arrow[drr, no head] & & K(\alpha_2) \arrow[d, no head] & \cdots & K(\alpha_d) \arrow[dll, no head] \\
 & & K & &
\end{tikzcd}$$

$$gr(f) = \#\{\alpha_i\} = \#\left(\bigcup_{i=1}^{d} R(\alpha_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \# R(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{d} r = d \cdot r$$

Pues $K(\alpha_i) \neq K(\alpha_j) \iff R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j) = \emptyset$

En efecto; PvP: $K(\alpha_i) = K(\alpha_j) \iff R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j) \neq \emptyset$

$\Rightarrow)$ $\alpha_i \in R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j)$

$\Leftarrow)$ Si $\beta \in R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j)$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
K(\alpha_i) \arrow[d, dash, "1"'] \arrow[dd, dash, bend right=60, "gr(f)"'] & & K(\alpha_j) \arrow[dll, dash, "1"'] \\
K(\beta) \arrow[d, dash, "gr(f)"] & & \\
K & &
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow K(\beta) = K(\alpha_i) = K(\alpha_j)$$

Ej $f = x^3 - 2$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \xi_3] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\xi_3) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\xi_3^2) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Acá: $r = 1$

Prop: $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$

Sup. fuese sí: $\sqrt[3]{2} \underset{(1)}{=} a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{3^2}$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
E = \mathbb{Q}(\xi_3)(\sqrt[3]{3}) \arrow[d, dash, "3"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
K := \mathbb{Q}(\xi_3) \arrow[d, dash, "2"'] & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \arrow[dl, dash, "3"] \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Sea $\sigma\ E \xrightarrow[K]{} E$
$\sqrt[3]{3} \longmapsto \sqrt[3]{3}\,\xi_3$
(es un K-morf, pues $m_{\sqrt[3]{3}, K} = x^3 - 3$)

Aplico σ a (1): $\sqrt[3]{2}\,\xi_3^i \underset{(2)}{=} a + b\sqrt[3]{3}\,\xi_3 + c\sqrt[3]{3^2}\,\xi_3^2$

con $0 \le i \le 2$, pues $m_{\sqrt[3]{2}, K} = x^3 - 2$

Aplico σ a (2):

$$\sqrt[3]{2}\,\xi_3^{2i} \underset{(3)}{=} a + b\sqrt[3]{3}\,\xi_3^{2} + c\sqrt[3]{3^2}\,\xi_3$$

Hago (1) + (2) + (3) y ... (ejercicio)

Extensiones Normales:

Def N/K es normal si es algebraica y $\forall\, h \in K[x]$ irreducible, si h tiene una raíz en N, tiene todas.

Prop. Sea N/K algebraica. Son equivalentes

1) N/K es normal
2) Si $\sigma : N \xrightarrow[K]{} \overline{K} \Rightarrow \sigma(N) \subseteq N$
3) N es cdd de una flia de polinomios de K

Prop.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dr, dash, "\text{normal}"] & \\
N \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash, "\text{normal}"'] & & E \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} N \\ | \\ E \\ | \\ K \end{array}$$

- N/K normal $\Rightarrow$ N/E normal
  $\not\Rightarrow$ E/K normal
- N/E, E/K normales $\not\Rightarrow$ N/K normal

Ej. $[N:K]=2 \Rightarrow N/K$ es normal (Práctica)

Ej: $n, m \in \mathbb{N}$, $m \notin \mathbb{Q}^n$.

$\underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})}_{=E}/\mathbb{Q}$ es normal $\Longleftrightarrow$ n es par y $m \in \mathbb{N}^{n/2}$ y

Dem. $\Leftarrow$) $m = a^{\frac{n}{2}}$, con $a \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (\sqrt[n]{m})^2 = a \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow [E:\mathbb{Q}] = 2 \Rightarrow$ es normal ✓

$\Rightarrow$) $\mathbb{Q}(\underbrace{\sqrt[n]{m}}_{=\alpha})$ sea $f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$

$|$

$\mathbb{Q}$

$\Rightarrow f \mid x^n - m$

Como $E/\mathbb{Q}$ es normal, f tiene todas sus raíces en E. Pero como $E \subseteq \mathbb{R}$:

$f = x - \sqrt[n]{m}$ NO: $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$

ó

$f = (x - \sqrt[n]{m})(x + \sqrt[n]{m}) = x^2 - (\sqrt[n]{m})^2$

Luego: $f = x^2 - (\sqrt[n]{m})^2$ y n es par; y $(\sqrt[n]{m})^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = a^{n/2}$. ∎

Ej. $\mathbb{Q}(\sqrt[15]{17})/\mathbb{Q}$ NO

$\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})/\mathbb{Q}$ NO

$\mathbb{Q}(\sqrt[10]{32})/\mathbb{Q}$ Sí

$\left(\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}\right)$

Ej: K cuerpo, $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $f \in K[x]$, $\mathrm{gr}(f) = 3$, irreducible, $f = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \overline{K}$.

$$\begin{array}{c} K[a,b,c] \\ d \,| \\ K[a] \\ 3 \,| \\ K \end{array}$$

$K[a,b,c] = K[a,b]$

Pues $a+b+c \in K$

Además. $(x-b)(x-c) = \dfrac{f}{(x-a)} \in K[a][x]$

$\Rightarrow m_{b,K[a]} \mid (x-b)(x-c)$

$\Rightarrow \mathrm{gr}(m_{b,K[a]}) = 1$ ó 2

Idea: $d = 1$ ó 2.

Luego $[K[a,b,c] : K] = 3$ ó 6

Prop. $k(a)/k$ es normal $\iff \sqrt{\Delta} \in K$

(**Def.** $\Delta := (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ "obscuramente")

$\in K$ ("Res(f,f')")

Dem. $m_{\sqrt{\Delta},K} = x - \sqrt{\Delta}$ ó $x^2 - \Delta$

$$\left.\begin{array}{c} k[a,b,c] \\ | \\ k[a,\sqrt{\Delta}] \\ | \\ k[a] \\ 3\,| \\ K \end{array}\right\} 3 \text{ ó } 6$$

$\Rightarrow$) Por hipótesis, $b, c \in k[a]$

$\Rightarrow k[a,b,c] = k[a,\sqrt{\Delta}]$
$= k[a]$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} k[a] \\ | \\ k[\sqrt{\Delta}] \\ | \\ k \end{array}\right\} 3 \Rightarrow 1 \text{ ó } \cancel{2}$$

$\Leftarrow$) $\sqrt{\Delta} \in K \Rightarrow k[a,\sqrt{\Delta}] = k[a]$,

Qvq $b, c \in k[a]$, pues en tal caso

$k[a] = k[a,b,c]$. Pero:

$a+b+c \in K \Rightarrow b+c \in k[a]$

$$b-c = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{(a-b)(c-a)} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{a(b+c)-a^2-bc} \in K[a]$$

Pues $bc \in K[a]$, porque $abc \in K$

Luego $\left\{\begin{array}{ll} b+c & \in K[a] \\ b-c & \text{"} \quad \text{"} \end{array}\right. \Longrightarrow b, c \in K[a]$

$\blacksquare$

Ej.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

no es normal

$(\Longrightarrow \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q})$