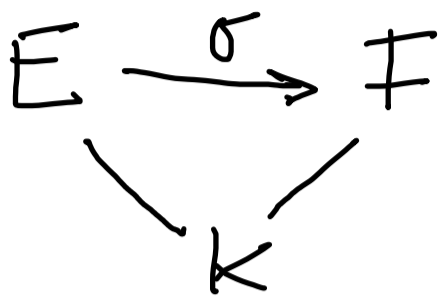


K-morfismos: Dados $E/k, F/k$ extensiones,

$\sigma: E \rightarrow F$ es un K-morfismo si es un morfismo de cuerpos
y $\sigma|_K = \text{id}_K$.



Prop. α, β algebraicos sobre k ,

$$\exists \sigma: k(\alpha) \xrightarrow[k]{} k(\beta) \iff M_{\alpha, k} = M_{\beta, k}$$
$$\alpha \longmapsto \beta$$

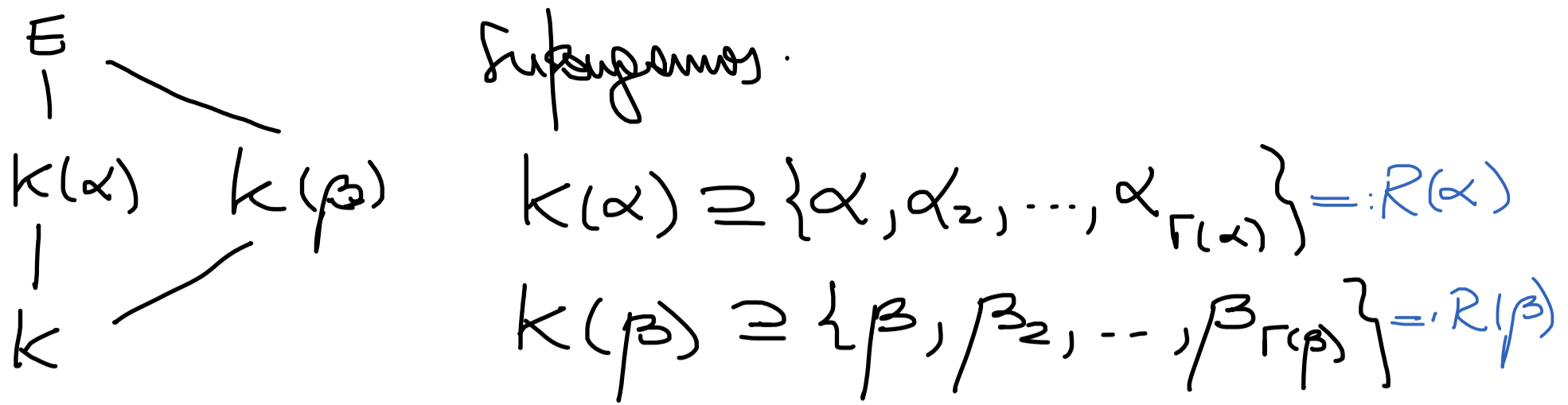
Obs. $\sigma: E \xrightarrow[k]{} F$ induce $\sigma: E[x] \rightarrow F[x]$ morf.
de anillos (nuevo); y se tiene que si $f \in k[x]$,
 $\alpha \in E$, entonces $\sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$.

Ej. Sea $f \in k[x]$ irreducible ^{con raíces simples} y sea E su cdd
sobre k . Para $\alpha \in E$, raíz de f , sea

$$\Gamma(\alpha) := \{ \text{raíces de } f \text{ en } k(\alpha) \}$$

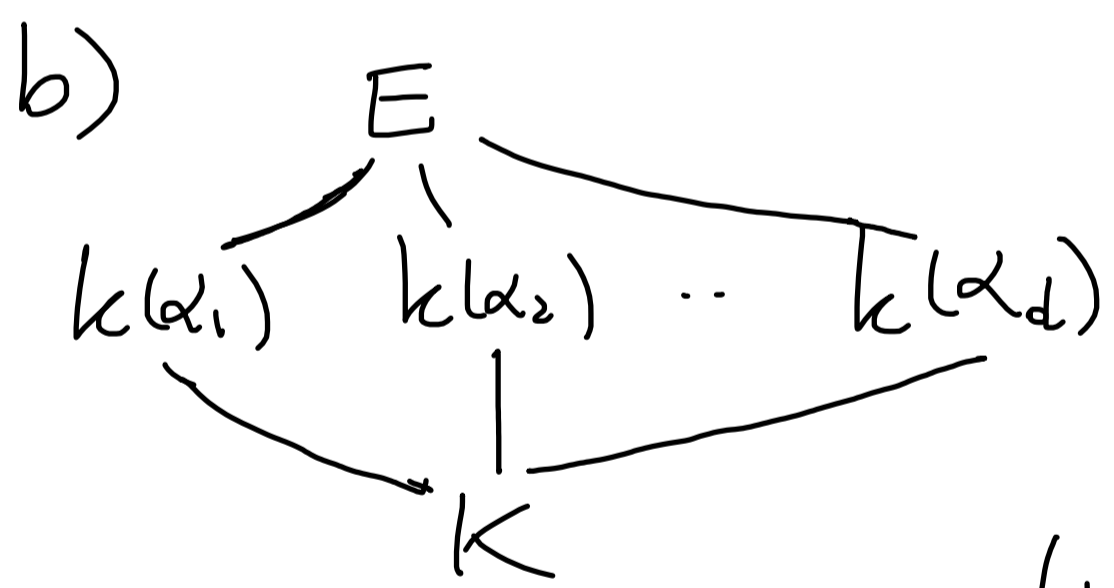
a) $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$, $\forall \alpha, \beta$ raíces de f

b) Si $d = \{ \text{cuerpos } k(\alpha_i) \}$, α_i , raíz de f , entonces
 $d.r = g_r(f)$



Sea $\sigma: k(\beta) \xrightarrow{K} k(\alpha)$
 $\beta \mapsto \alpha$

Entonces $\sigma(\beta_j) \in k(\alpha)$ y más aún, $\sigma(\beta_j) = \alpha_i$,
 para algún i , pues $\sigma(\beta_j)$ también es raíz de f
 y como σ es iny, resulta $\Gamma(\beta) \leq \Gamma(\alpha)$
 Simétricamente $\Gamma(\alpha) \leq \Gamma(\beta) \checkmark$

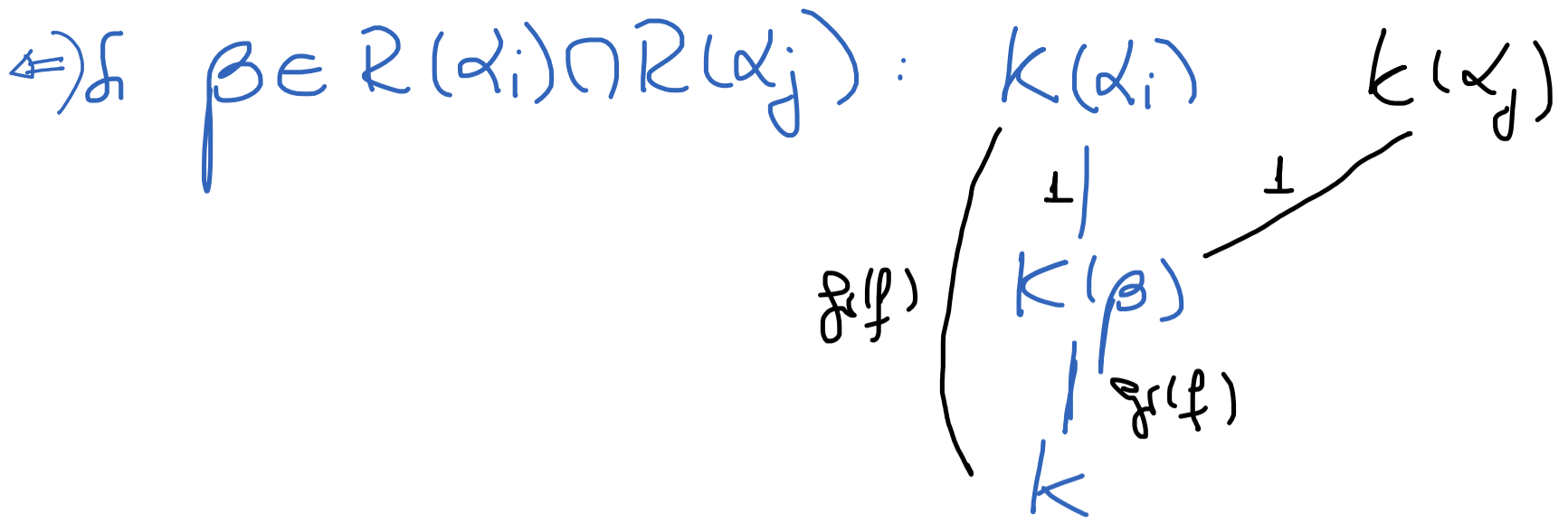


$$g(f) = \# \{ \alpha_i \} = \# \left(\bigcup_{i=1}^d R(\alpha_i) \right)$$

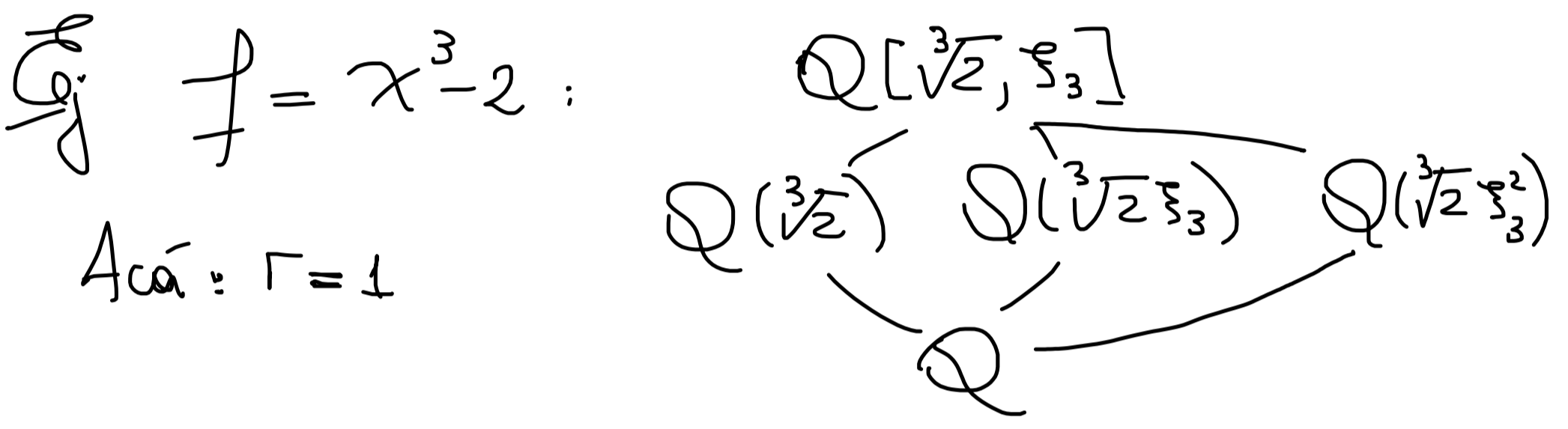
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^d \# R(\alpha_i) = \sum_{i=1}^d \Gamma = d \cdot \Gamma$$

↪ Pues $k(\alpha_i) \neq k(\alpha_j) \Leftrightarrow R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j) = \emptyset$

En efecto; $f \neq \emptyset: k(\alpha_i) = k(\alpha_j) \Leftrightarrow R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j) \neq \emptyset$
 $\Rightarrow \alpha_i \in R(\alpha_i) \cap R(\alpha_j)$



$\Rightarrow K(\beta) = K(\alpha_i) = K(\alpha_j)$



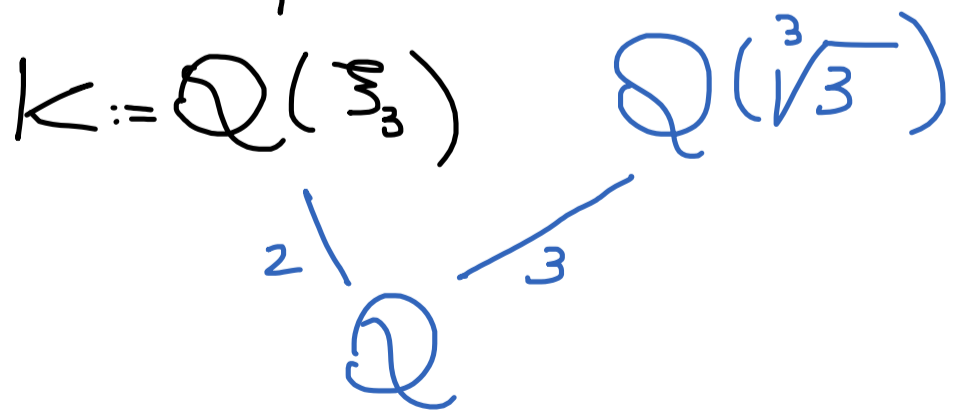
Prop: $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$

sup. func n. $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{3^2}$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

$E = \mathbb{Q}(\xi_3)(\sqrt[3]{3})$

Sea $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$

$\sqrt[3]{3} \mapsto \sqrt[3]{3}\xi_3$



(es un k -morf, pues $\text{m}_{\sqrt[3]{3}, k} = x^3 - 3$)

Aplico σ a (1): $\sqrt[3]{2}\xi_3^i = a + b\sqrt[3]{3}\xi_3 + c\sqrt[3]{3^2}\xi_3^2$
 con $0 \leq i \leq 2$, pues $\text{m}_{\sqrt[3]{2}, k} = x^3 - 2$

Aplica σ a (2):

$$\sqrt[3]{2} \zeta_3^{2i} = a + b\sqrt[3]{3} \zeta_3^2 + c\sqrt[3]{3^2} \zeta_3$$

(3)

Logo (1) + (2) + (3) y ... (ejercicios)

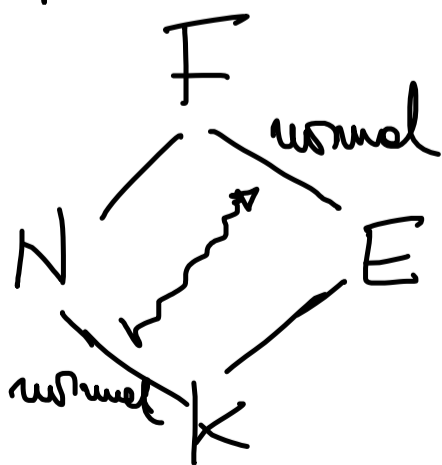
Extensiones Normales:

Def N/K es normal si es algebraica y $\forall h \in K[x]$ irreducible, si h tiene una raíz en N , tiene todas.

Prop. Sea N/K algebraica son equivalentes

- 1) N/K es normal
- 2) Si $\sigma: N \xrightarrow{K} \bar{K} \Rightarrow \sigma(N) \subseteq N$
- 3) N es c.c.d. de una fca de polinomios de K

Prop.



N
 $|$
 E
 $|$
 K

• N/K normal $\Rightarrow N/E$ normal
 ~~$\Rightarrow E/K$ normal~~

• $N/E, E/K$ normales
 ~~$\Rightarrow N/K$ normal~~

Pr. $\mathbb{Q}(\sqrt[15]{17}) / \mathbb{Q}$ NO

$\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3}) / \mathbb{Q}$ NO

$\mathbb{Q}(\sqrt[10]{32}) / \mathbb{Q}$ SÍ

$(\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2})$

Pr: K cuerpo, $\text{car}(K) \neq 2$, $f \in K[x]$,
 $\text{gr}(f) = 3$, irreducible, $f = (x-a)(x-b)(x-c)$,
 $a, b, c \in \overline{K}$.

$K[a, b, c] \quad K[a, b, c] = K[a, b]$

$d \mid$ Pues $a+b+c \in K$

$K[a] \quad$ Además $(x-b)(x-c) = \frac{f}{(x-a)} \in K[a][x]$

$3 \mid$
 $K \quad \Rightarrow \mu_{b, K[a]} \mid (x-b)(x-c)$

$\Rightarrow \text{gr}(\mu_{b, K[a]}) = 1 \text{ ó } 2$

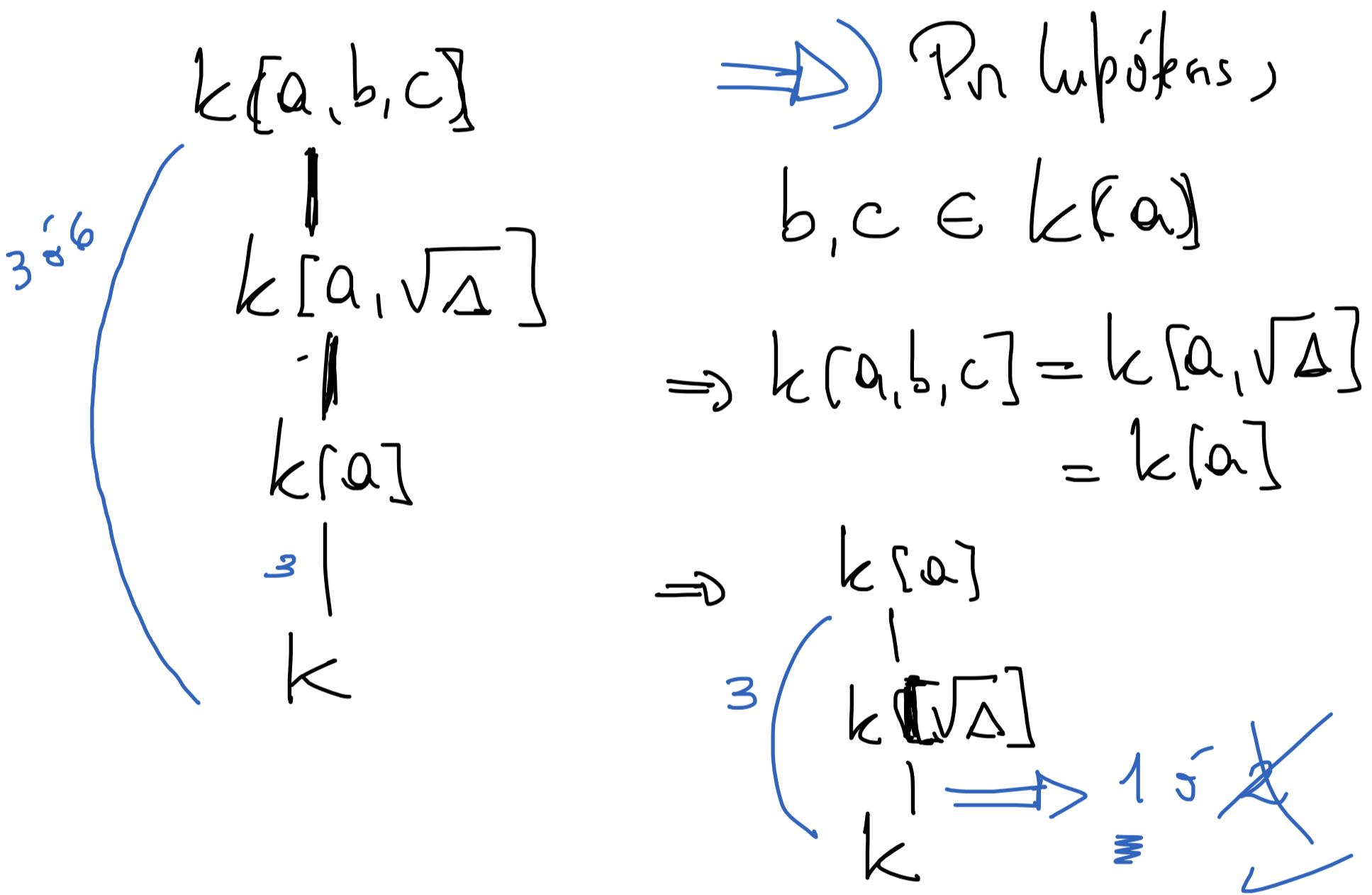
Logo: $d = 1 \text{ ó } 2$.

Logo $[K[a, b, c] : K] = 3 \text{ ó } 6$

Prop. $k(a)/k$ es normal $\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \in k$

(Def. $\Delta := (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ "discriminante")
 $\in k$ ($\neq \text{Res}(f, f')$)

Dem. $m_{\sqrt{\Delta}, k} = x - \sqrt{\Delta}$ ó $x^2 - \Delta$



\Leftarrow $\sqrt{\Delta} \in k \Rightarrow k[a, \sqrt{\Delta}] = k[a],$

por $b, c \in k[a]$, pues en tal caso

$k[a] = k[a, b, c]$. Pero.

$a + b + c \in k \Rightarrow b + c \in k[a]$

$$b-c = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{(a-b)(c-a)} = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{a(b+c) - a^2 - bc} \in K[a]$$

Pues $bc \in K[a]$, por que $abc \in K$

luego $\left\{ \begin{array}{l} b+c \in K[a] \\ b-c \text{ " " } \end{array} \right. \Rightarrow b, c \in K[a]$



Ej.

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{Q}$$

no es normal

$$(\Rightarrow \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q})$$