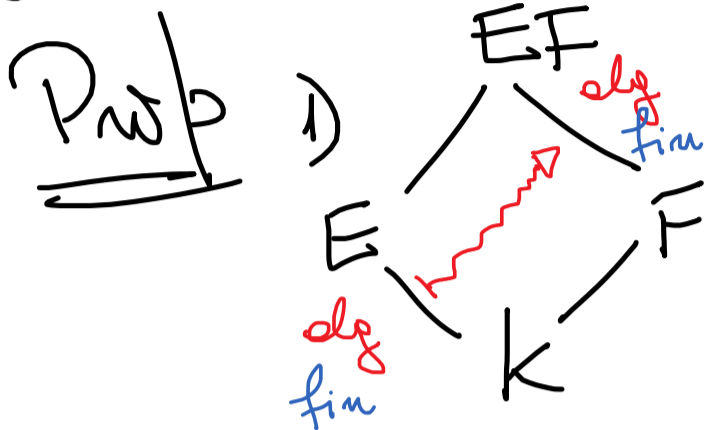
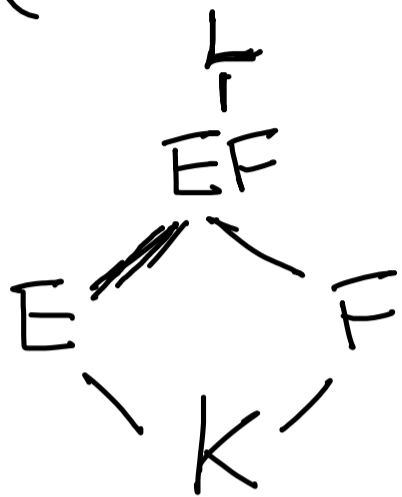
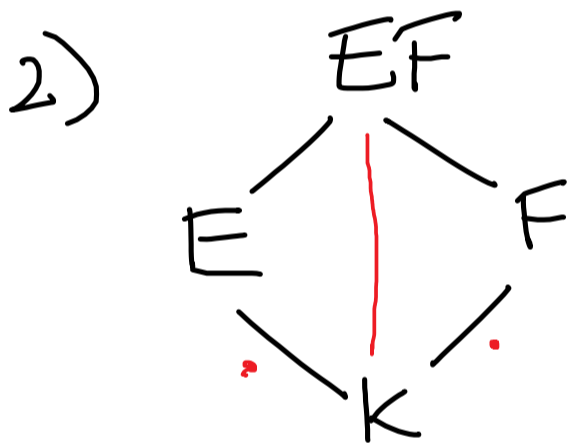


Def. Sean  $E/k$  y  $F/k$  dos extensiones,  
 de finitos.  $EF := K(E \cup F) = E(F) = F(E)$

"el menor cuerpo que contiene a ambos"  
 (dentro de algún cuerpo que los contenga)



y si  $E/k$  es finita:  $[EF:F] \leq [E:k]$

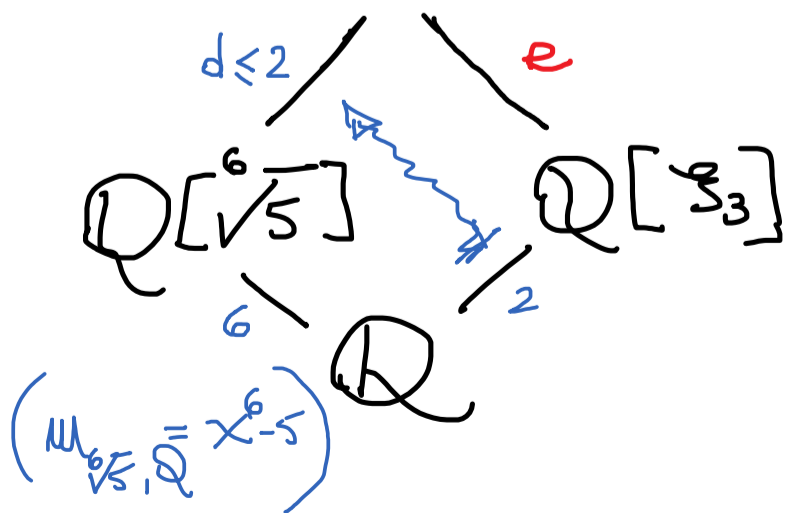


$[EF:k]$  es alg (fina)

$\Leftrightarrow E/k$  y  $F/k$   
 son alg (fina.)

Ej:  $[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}, \zeta_3] : \mathbb{Q}[\zeta_3]] = ?$  ( $= e$ )

$$\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}](\mathbb{Q}[\zeta_3]) = \mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}, \zeta_3]$$



Pero si  $d=1$ .

$$\Rightarrow \zeta_3 \in \mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}] \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \not\ni \zeta_3$

luego,  $d=2$ ,  $\therefore$  Res  $e=6$

Ej. 2)  $E/K$ ,  $f, g \in K[x]$  irreducibles,  $\text{tp}$   
 $(g(f) : f(g)) = 1$ , Sean  $\alpha, \beta \in E$   $\text{tp}$   
 $f(\alpha) = g(\beta) = 0$ . Entonces  $f$  es irreducible  
en  $K[\beta][x]$ .

$$\begin{array}{ccc} & K[\alpha, \beta] = K[\beta][x] & \\ \begin{array}{c} g(f) \\ K[\alpha] \end{array} & \swarrow & \searrow \\ & K & \\ \begin{array}{c} f(g) \\ K[\beta] \end{array} & \swarrow & \searrow \end{array} \rightarrow \text{Pues } (g \circ f \cdot f \circ g) = 1$$

Luego:  $f = \text{un } \alpha, K[\beta]$   
 $\Rightarrow f$  irred en  $K[\beta][x]$

Def. Sea  $K$  un cuerpo, definimos  
 $K[[x]] := \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n, a_n \in K \right\}$  "series formales",  
con '+' y '.' "naturales".

Obs 1)  $K[[x]]$  es un anillo.

2)  $K[[x]]^\times = ?$

$$\text{Si: } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\times \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

---


$$1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = 1/a_0 \quad (\text{Necesario } a_0 \neq 0)$$

$$\text{y sigo: } b_1 a_0 + b_0 a_1 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 a_0 + a_1 / a_0 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = -a_1 / a_0^2 \quad (a_0 \neq 0)$$

En general voy encontrando los  $b_i$ 's; con sólo pedir  $a_0 \neq 0$

$$\underline{\text{Def:}} \quad k[[x]]^{\times} = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n, a_0 \neq 0 \right\}$$

$$\text{Ej: } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Obs: 3)  $\forall a \in k[[x]] : a = x^N \cdot u$ , con  $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}, u \in k[[x]]^{\times}$ .

Además:  $k[[x]] / \langle x \rangle \sim K$ , con lo cual

$\langle x \rangle$  es maximal, y más aún es el único ideal maximal:

$$\text{Pues: } k[[x]] \setminus \langle x \rangle = k[[x]]^{\times}$$

Def:  $k[[x]]$  es un anillo local

Más aún: Todo ideal de  $k[[x]]$  es de la forma  $\langle x^N \rangle$ . (En particular:  $k[[x]]$  D.I.P)

Def  $k((x)) := \text{Frocc}(k[[x]])$

Obs  $k((x)) = \left\{ \sum_{m \geq M} a_m x^m, a_m \in k, M \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\left( \frac{x^{N_1} u_1}{x^{N_2} u_2} = x^{N_1 - N_2} \cdot u_3 \right)$$

Ej:  $y^2 - x \in \mathbb{Q}((x))[y]$  es irreducible?

Si  $y^2 - x \in \mathbb{Q}[[x]][y]$  es irreducible, esto  
(lo es en  $\mathbb{Q}((x))[y]$ ); y sí, pues  $x$  es  
primo y un Eisenstein

$$2) y^2 - (x+1) = (y - \sqrt{x+1})(y + \sqrt{x+1}),$$

$$\sqrt{x+1} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad (\text{existen } a_n \text{'s, tomando el desarrollo de Taylor})$$

$$3) y^2 - e^x = (y - e^{x/2})(y + e^{x/2})$$

$$\text{con } e^x := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

Obs. Similares a definir  $k((x^{1/2}))$ ,  $k((x^{1/3}))$ , ...

$$k((x^{1/2})) = \left\{ \sum_{n \geq M} a_n x^{n/2}, a_n \in k, M \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{K}((x))^\wedge := \left\{ \sum_{n \geq M} a_n x^{\frac{n}{N}}, a_n \in \mathcal{K}, M \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

Teo:  $\mathbb{C}((x))^\wedge$  es alg cerrado.

Ej:  $Y^2 - \text{sen } x \in \mathbb{C}((x))[Y]$ ,

$$\text{sen } x := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

es irreducible (Eisenstein; de hecho con el primo  $x$ )

Ej:  $Y^2 - \text{sen } x \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{2}}))[Y]$  es reducible.

### Extensiones Transcendentes.

Def  $E/\mathcal{K}$ : 1)  $t \in E$  es trascendente si no es algebraico  
(si  $f \in \mathcal{K}[x]$ ,  $f(t) = 0 \Rightarrow f = 0$ )

2)  $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq E$  son algebraicamente indep'tes si.

$$f \in \mathcal{K}[x_1, \dots, x_n], f(t_1, \dots, t_n) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Obs.  $\{t_1\}$  alg indep'te  $\Leftrightarrow t_1$  es trascendente

Ej:  $\{x, y\}$  es alg indep'te sobre  $\mathbb{Q}$

•  $\{x\}$  " " " "  $\mathbb{Q}(y)$

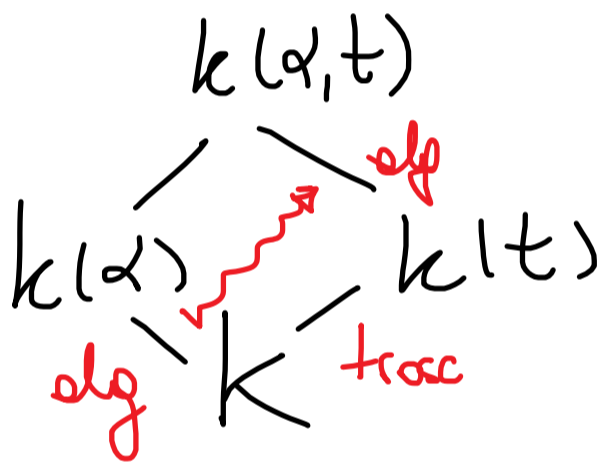
•  $\{x, x + \sqrt{2}\}$  NO es alg indep'te sobre  $\mathbb{Q}$

Pues  $f = (X - Y)^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ ,

y  $f(x, x + \sqrt{2}) = 0$

Ej. Sea  $K$  cuerpo infinito,  $\alpha$  algebraico sobre  $K$  y  $t$  trascendente sobre  $K$ . Entonces

$$m_{\alpha, K} = m_{\alpha, K(t)}$$



Dem. Sean  $f = m_{\alpha, K}$  y  $g = m_{\alpha, K(t)}$

$$\Rightarrow g \mid f.$$

$$\exists g = X^n + \frac{b_{n-1}(t)}{c_{n-1}(t)} X^{n-1} + \dots + \frac{b_1(t)}{c_1(t)} X + \frac{b_0(t)}{c_0(t)}$$

$$c(t) \cdot = c_0(t) \cdot c_1(t) \cdot \dots \cdot c_{n-1}(t) \in K[t]$$

$$\Rightarrow c(t) \cdot g = c(t) X^n + \tilde{b}_{n-1}(t) X^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1(t) X + \tilde{b}_0(t)$$

Sea  $k \in K$  tq  $c(k) \neq 0$ , entonces.

(existe, pues  $K$  es infinito)

$$\Rightarrow C(k)g(\alpha) = C(k)\alpha^n + \tilde{b}_{n-1}(k)\alpha^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1(k)\alpha + \tilde{b}_0(k)$$

(\*)

Luego, si  $h = C(k)\alpha^n + \tilde{b}_{n-1}(k)\alpha^{n-1} + \dots + \tilde{b}_0(k)$ ,

$$h \in k[x] \quad y \quad h(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow f | h, \quad \text{Pero } g_f(h) = g_f(g)$$

$$\Rightarrow \boxed{f = g}$$

(\*) Sea general si  $t$  es un esc. sobre  $K$

$$f(t) = g(t) \Rightarrow (f - g)(t) = 0$$

$$\Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f(k) = g(k),$$

$\downarrow$   
t. esc

$\forall k \in K$