Extensiones de cuerpos:

Def. E es una extensión de K si $\exists\ K \xrightarrow{\phi} E$ morfismo de cuerpos

Idea $K \hookrightarrow E$

Notación E/K, **Representación**:
$$\begin{array}{c} E \\ | \\ K \end{array}$$

Ej.
$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ | \\ \mathbb{R} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Obs. E es una K-álgebra, y en particular un K-esp. vect., ($[E:K] = \dim_K E$: "grado de la extensión")

Def Dada E/K, $\alpha \in E$, α se dice algebraico sobre K, si $\exists\ f \in K[x]$, $f \neq 0$ tq $f(\alpha) = 0$

En tal caso, al f de grado mínimo y mónico se lo llama pol minimal de α sobre K.

Not. $m_{\alpha,K}$, $\operatorname{irr}(\alpha, K)$

Obs
- $f \in K[x] \setminus \{0\}$, $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$
- $f = m_\alpha \iff f(\alpha) = 0$ y f es irred

Ej $m_{\sqrt{3},\mathbb{Q}} = x^2 - 3$

$m_{\sqrt[n]{a},\mathbb{Q}} = x^n - a$; con $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ libre de cuadrados

Pues es irreducible por Eisenstein, (en $\mathbb{Z}[x]$ y también en $\mathbb{Q}[x]$ por ser primitivo)

$m_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} = x^3 - 2$ (lo veremos en un rato)

Ej $\alpha =$ "$\sqrt[4]{-4}$" (alguna de ellas)

O sea: $\alpha = \pm(1+i)$ ó $\pm(1-i)$

¿$m_{\alpha,\mathbb{Q}}$? $m_{\alpha,\mathbb{Q}} \overset{?}{=} x^4 + 4$,

Veamos si es irreducible. Si lo fuera.

$x^4 + 4 = p \cdot q$, $p, q \in \mathbb{Q}[x]$, ambos de grado 2

Propongo $p = x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}[x]$

$q = x^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[x]$

... resulta: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

irreducibles

Así que $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ es uno de los factores.

Nota: $\left(\pm(1+i)\right)^2 + 2 = 2+2i$

$\left(\pm(1-i)\right)^2 + 2 = 2-2i$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{1+i,\mathbb{Q}} = x^2-2x+2 \\ m_{-1-i,\mathbb{Q}} = x^2+2x+2 \\ m_{1-i,\mathbb{Q}} = x^2-2x+2 \\ m_{-1+i,\mathbb{Q}} = x^2+2x+2 \end{cases}$$

Def. E/K es algebraica si $\alpha \in E$ es algebraico sobre K, $\forall \alpha \in E$

Obs. E/K finita $\Rightarrow$ E/K algebraica

Prop E/K, $\alpha \in E$, son equivalentes.

i) α es algebraico sobre K

ii) $K(\alpha)/K$ es algebraica

iii) $K(\alpha) = K[\alpha]$

iv) $k(\alpha)/k$ es finita

en tal caso: $[k(\alpha):k] = gr(m_{\alpha,k})$

Ej: Dada E/k, $\alpha, \beta \in E$ de grado 2

(o sea $gr(m_{\alpha,k}) = 2 = [k(\alpha):k]$)

Entonces: $\alpha \in k(\beta) \iff k(\alpha) = k(\beta)$

Dem: $\Leftarrow$) Obvio ✓

$\Rightarrow$)

$$\begin{tikzcd} k(\beta) \arrow[d, dash, "n"'] \arrow[dd, dash, bend left, "2"] \\ k(\alpha) \arrow[d, dash, "2"'] \\ k \end{tikzcd}$$

Recordemos que si E/F, F/k finitas

$\Rightarrow [E:k] = [E:F]\cdot[F:k]$

Luego $n = 1$, entonces $k(\beta) = k(\alpha)$.

Obs Vale también con otro número en vez de 2

Ej Sea ξ_3 raíz cúbica primitiva de 1

¿$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\xi_3)$?

Tenemos que $m_{\xi_3,\mathbb{Q}} = x^2 + x + 1$

$$\left(x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \right)$$

Entonces $\sqrt{3}$ y ξ_3 tienen grado 2, luego, si $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\xi_3)$, sería: $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\xi_3)$

Pero $\underset{\mathbb{R}}{\xi_3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\text{Abs}}}$

$\underline{\underline{\text{Prop}}}$ E/K, $\alpha, \beta \in E$ algebraicos sobre K

$\Longrightarrow \alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ son algebraicos sobre K

¿Cómo conocer $f \in K[x]$ tq $f(\alpha+\beta) = 0$?

1) Vía resultantes

2) Ej. $\gamma = \sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$: Si $g = (x - \sqrt{5})^3 - 2$,

$g(\gamma) = 0$: Ahora.

$$(x - \sqrt{5})^3 - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 15x - 5\sqrt{5} - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^3 + 15x - 2 = \sqrt{5}(3x^2 + 5)$$

$$\Longrightarrow \quad (x^3 + 15x - 2)^2 = 5(3x^2+5)^2$$

Luego, si $f = (x^3 + 15x - 2)^2 - 5(3x^2+5)^2$,

$f \in \mathbb{Q}[x]$ y $f(\gamma) = 0$.

¿ $f = m_{\gamma, \mathbb{Q}}$? Veremos...

3) E/K finita de grado n, $\alpha \in E$,

$L_\alpha : E \to E$, $L_\alpha(x) = \alpha x$

Por ej. 5. $m_{\alpha, K} \mid \chi_{L_\alpha}$

Tomemos $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$, y resulta

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$ es base de E como $\mathbb{Q}$-ev. (Justificar..)

Sea $\alpha = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ y consideremos L_α y calculemos χ_{L_α}:

$$[L_\alpha(1)]_B = (0, 1, -1, 0)$$

$$[L_\alpha(\sqrt{2})]_B = (2, 0, 0, -1)$$

$$[L_\alpha(\sqrt{5})]_B = (-5, 0, 0, 1)$$

$$[L_\alpha(\sqrt{10})]_B = (0, -5, 2, 0)$$

Así: $\chi_{[L_\alpha]_B} \in \mathbb{Q}[x]$ y anula a α

Obs:

$$E \longrightarrow K^{n\times n}$$
$$\alpha \longmapsto [L_\alpha]_B \text{, con } B \text{ base de } E \text{ como } K\text{-ev}$$

es un morf de anillos (iNY)

O sea $E \hookrightarrow K^{n\times n}$

Ej: $\underbrace{[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt[3]{2}]:\mathbb{Q}]}_{m} = \ ?$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt{2}]$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt[3]{2}] \overset{?}{\Big|} \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \overset{2}{\Big|} \mathbb{Q} \qquad \longrightarrow m_{\sqrt{2},\mathbb{Q}} = x^2-2$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}][\sqrt{2}] \Big| \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \overset{3}{\Big|} \mathbb{Q} \qquad m_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}} = x^3-2$$

Entonces. $2 \mid m$, $3 \mid m$ $\Longrightarrow$ $6 \mid m$

Pero $x^3-2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}][x]$

$$\Rightarrow [\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]] \leq 3$$

Luego: $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right] \leq 3$

$\therefore \boxed{m = 6}$

Ej: Con esta misma idea probar que $m_{\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}}$ es el que encontramos antes.

Ej: $\underbrace{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\cdot \xi_3] \cap \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\cdot \xi_3^2]}_{E} = ?$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,\xi_3] \arrow[dr, dash, "a"] \arrow[ddr, dash, bend right, "3"'] & & \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,\xi_3^2] \arrow[dl, dash] \arrow[ddl, dash, bend left, "3"] \\
 & E \arrow[d, dash, "b"'] & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}
$$

(minimal $= x^3 - 2$) (Idem)

Luego $(a = 1 \text{ y } b = 3)$ ó $(a = 3 \text{ y } b = 1)$

Si $a = 1$ y $b = 3$:

$\Longrightarrow E = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,\xi_3] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,\xi_3^2]$

Entonces. $\xi_3 = \dfrac{\sqrt[3]{2}\,\xi_3^2}{\sqrt[3]{2}\,\xi_3}$ pertenece a ambos

Pero

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\,\xi_3] \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right=60, "3"'] \\ \mathbb{Q}[\xi_3] \arrow[d, dash, "2"'] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$2 \mid 3$. **Abs**

Luego: $b = 1$, o sea: $E = \mathbb{Q}$.