

Extensiones trascendentes:

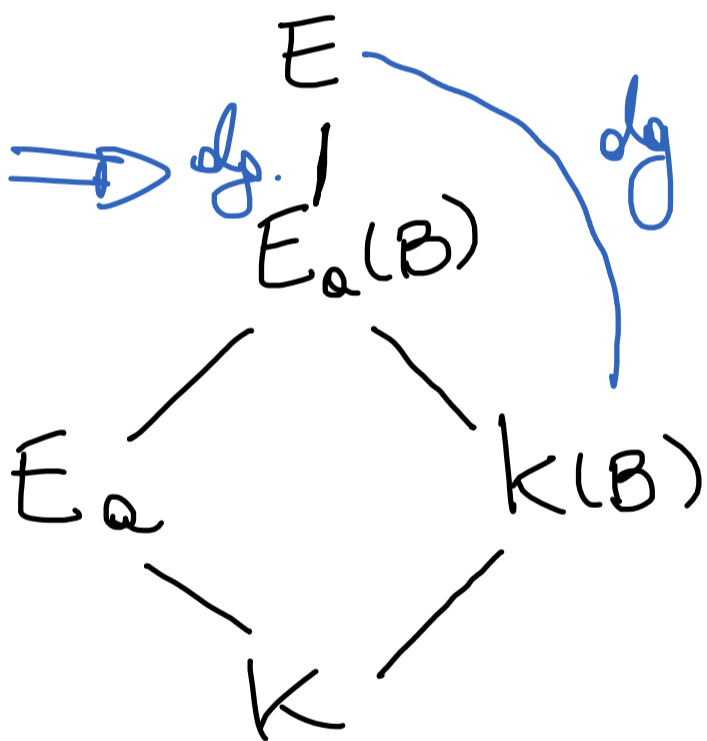
Def. Sea E/K una extensión y sea:

$$E_a = \{ \alpha \in E : \alpha \text{ algebraico sobre } K \}$$

Sea B una base de trascendencia de E/K .

1) Probar que B es base de trascendencia de E/E_a

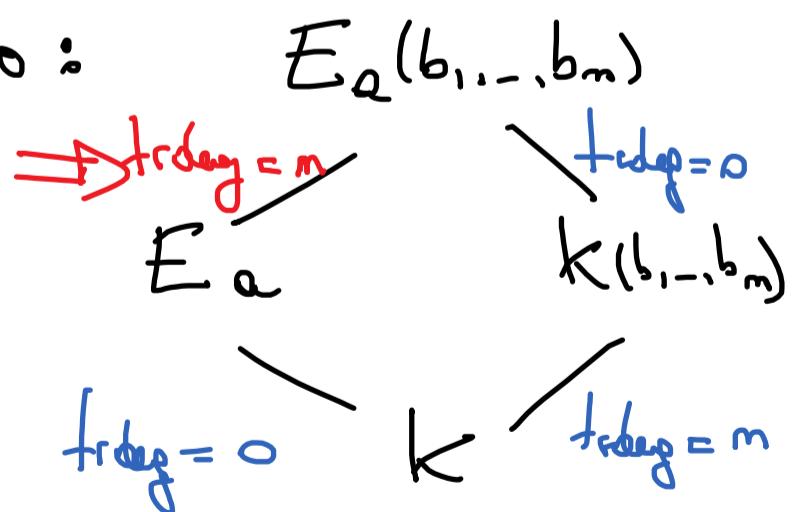
2) ¿ $E_a(B) = E$?



Veremos que B es alg indep'le sobre E_a .

Sea $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq B$:

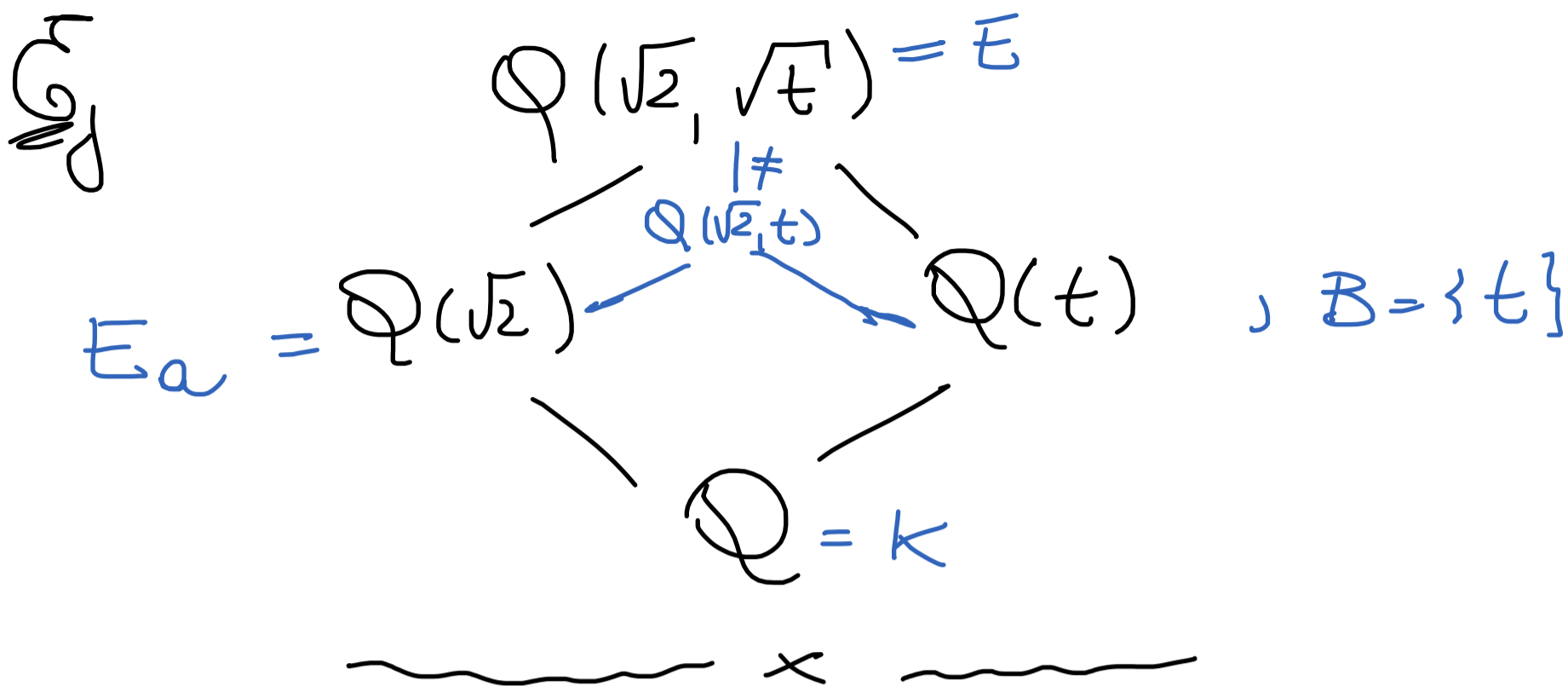
Consideremos:



$\Rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ es alg indep'le sobre E_a .

Después B es alg indep'le sobre E_a

2) No



Teo (*) $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, entonces $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son algebraicos sobre K

Def. Sean $A \subseteq B$ anillos conmutativos. $\alpha \in B$ se dice entero sobre A si $\exists p \in A[x]$ mónico t. $p(\alpha) = 0$.

Obs. α, β enteros sobre $A \Rightarrow \alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$ lo son

Def. $A \subseteq B$, anillos conmut. A se dice integrante cuando en B si:

$b \in B$ entero sobre $A \Rightarrow b \in A$

Prop. Si A es DfU, A es integrante cuando

en $\text{Fracc}(A)$

Dem, Gauss

Obs i) t trascendente sobre $k \Rightarrow k[t]$ es íntegramente cerrado en $k(t)$

ii) $k[t]$ tiene infinitos primos

iii) A DfU y α algebraico sobre $\text{Fracc}(A)$, entonces $\exists \beta \in A$ tq $\beta\alpha$ es entero sobre A .

Dem. Digamos $\alpha^m + \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}\alpha^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{b_1}\alpha + \frac{a_0}{b_0} = 0$,

con $a_i, b_i \in A$

$$\Rightarrow \underbrace{(b_{m-1} \cdot \dots \cdot b_0 \alpha)}_{\beta} + a_{m-1} \tilde{b}_{m-1} (\beta\alpha)^{m-1} + \dots + a_1 \tilde{b}_1 (\beta\alpha) + a_0 \tilde{b}_0 = 0$$

□

Dem (de *) Inducción

• $n=1$ ✓

• Para inducción (" $n-1 \Rightarrow n$ ")

$$k[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subseteq k(\alpha_1)[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$$

$$\subseteq k(\alpha_1)(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Hipótesis \nearrow $= k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$

$$\Rightarrow k(\alpha_1)[\alpha_2, \dots, \alpha_n] = k(\alpha_1)(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Pn HI: $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ son alg sobre $k(\alpha_1)$

Entonces $\forall \alpha_i$ es alg sobre k .

Pues $k(\alpha_1)[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

$$\left(\begin{array}{c} | \text{alg} \\ k(\alpha_1) \\ | \text{alg} \\ k \end{array} \right)$$

Supongamos que no, sea α_1 es trasc sobre k

Ahora $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ son alg sobre $k(\alpha_1)$, entonces,

por iii) $\exists \beta \in k[\alpha_1] \neq 0$ tal que $\beta \alpha_i$ es entero sobre $k[\alpha_1]$

Pero: $k(\alpha_1) \subseteq k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = k[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ↗ Hip

Entonces, dado $f \in k(\alpha_1)$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$\beta^r f$ es entero sobre $k[\alpha_1]$

Sea $p \in k[\alpha_1]$ primo tal que $p \nmid \beta$.

(existe, pues por i) hay un finito primos)

Sea $f = \frac{1}{p} \in K(\alpha_1)$. Entonces $\exists r \in \mathbb{N}$

$\exists \beta^r$ tal que $\beta^r f$ es entero sobre $K[\alpha_1]$, pero entonces $\beta^r f \in K[\alpha_1]$, pues $K[\alpha_1]$ es íntegro cerrado en $K(\alpha_1)$.

luego $p \mid \beta$: Abs. $\therefore \alpha_1$ es alg sobre K \square

— x —

Teo. E/K algebraica $\forall f \in K[x]$, no constante, f tiene una raíz en E (al menos)

Entonces E es alg. cerrado

Probarmos. $\forall f \in K[x]$ no constante, f tiene TODAS sus raíces en E .

Dem. Sea $f = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m) \in K[x]$,
 $\alpha_i \in \bar{K}$

Dados $\sigma \in S_m$ y $g \in K[x_1, \dots, x_m]$

definimos $\sigma(q) = q(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_m))$.

Dado en tal q ; sea.

$$P_q = \prod_{\sigma \in S_m} (x - \sigma(q)).$$

$P_q \in K[x]$, pues sus coeff's son simétricos en $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Entonces, por hipótesis,

P_q tiene al menos una raíz en E

O sea, $\exists \sigma \in S_m$ tq $\sigma(q) \in E$

Vamos entonces que: $\forall q \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\exists \sigma$ tq $\sigma(q) \in E$

Llamemos $V_\sigma = \{q \in K(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : \sigma(q) \in E\}$

Tenemos entonces que: $K(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\sigma \in S_m} V_\sigma$

Para cada V_σ es un subespacio vectorial de $K[x_1, \dots, x_n]$. Luego: $\exists \tau \in S_n$ tq

$$V_\tau = K[x_1, \dots, x_n]$$

Tomando entonces x_1 , resulta que $x_1 \in V_\tau$

$$\Rightarrow \tau(x_1) \in E$$

$$\Rightarrow x_1(\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)) \in E$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tau(x_1)}_{= x_{i_1}} \in E.$$

Tomando x_2, \dots, x_n , concluimos. $\alpha_i \in E, \forall i.$ \square