

Norma y traza.

Ej. 1) Hallar, si existe, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ tenga grado 3, $N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha) = 1$, $N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha+1) = 1$, y $N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha-1) = -7$.

Argumentos. $m_{\alpha, \mathbb{Q}} = x^3 + ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha) = (-1)^3 c = -c \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora: } N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha+1) &= (\alpha+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) \\ &= -(-1-\alpha)(-1-\alpha_2)(-1-\alpha_3) \\ &= -m_{\alpha, \mathbb{Q}}(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -(-1+a-b-1) \\ &= 2-a+b. \end{aligned}$$

$$\bullet N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha-1) = -m_{\alpha, \mathbb{Q}}(1)$$

$$\begin{aligned} &= -(1+a+b-1) \\ &= -a-b. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a+b = 1 \\ -a-b = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 4, b = 3}$$

Queda entonces: $m_{\alpha, \mathbb{Q}} = x^3 + 4x^2 + 3x - 1$, que es efectivamente irreducible, entonces existe tal α y es cualquier raíz de ese polinomio.

2) Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[m]{a})$, con $[K:\mathbb{Q}] = m$. Sea $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq K$ tq $[E:\mathbb{Q}] = d$. Probar que $E = \mathbb{Q}(\sqrt[d]{a})$ ($a \in \mathbb{Q}$)

Dem. Calculamos $N_{K/E}(\alpha) = \prod_{\sigma: K \rightarrow \bar{E}} \sigma(\alpha)$
 Pero: $\text{all } \alpha_{i,E} \mid x^m - a$

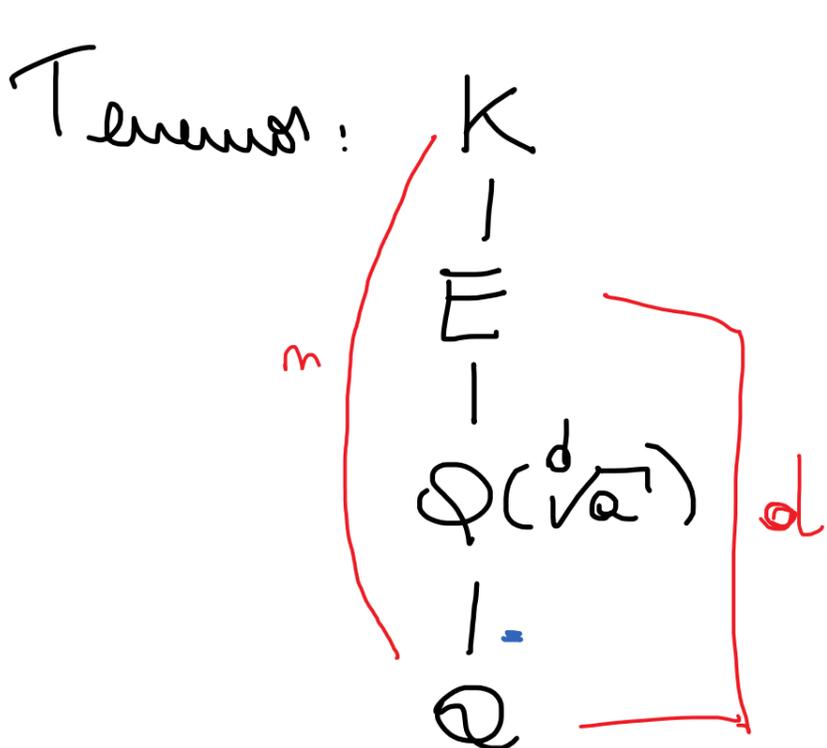
$$\Rightarrow N_{K/E}(\alpha) = \pm \prod_{i \in I} \alpha_i^i$$

con $I \subseteq \{0, \dots, m-1\}$, $|I| = m/d$

$$\text{Sea } N_{K/E}(\alpha) = \pm \alpha^{\sum_{i \in I} i} = \pm \sqrt[d]{a}^{\sum_{i \in I} i}$$

Pero $N_{K/E}(\alpha) \in E$, luego $l = 0$

En particular $\sqrt[d]{a} \in E$



$$\text{Bvq } [\mathbb{Q}(\sqrt[d]{a}) : \mathbb{Q}] = d$$

$$\text{Sea: } m_{\sqrt[d]{a}, \mathbb{Q}} = x^d - a$$

Veremos entonces q' $x^d - a$ es irreducible:

En efecto: si $x^d - a = g(x)h(x)$
 $\Rightarrow x^m - a = g(x^{\frac{m}{d}})h(x^{\frac{m}{d}})$

Pero $x^m - a$ es irred: Abs.

3) Sea E/K de grado m y sea $d|m$ tq.

$(d: \frac{m}{d}) = 1$. Sea $\alpha \in E$ y $a \in K$ tq.

$N_{E/K}(\alpha) = a^d$. Sea F una subextensión de grado $\frac{m}{d}$. Probar que existe $\beta \in F$ tq.

$$N_{F/K}(\beta) = a.$$

Dem: Supongamos $\Gamma d + S \frac{m}{d} = 1$

$$\Rightarrow a = a^{\Gamma d + S \frac{m}{d}} = (a^d)^\Gamma \cdot (a^{\frac{m}{d}})^S$$

$$= N_{E/K}(\alpha)^\Gamma \cdot N_{E/K}(a^{\frac{m}{d}})^S$$

$$= N_{E/K}(\alpha^\Gamma) \cdot N_{E/K}(a^{\frac{m}{d}})^S$$

$$= N_{F/K}(N_{E/F}(\alpha^\Gamma)) \cdot N_{F/K}(a^{\frac{m}{d}})^S$$

$$= N_{F/K}(\underbrace{N_{E/F}(\alpha^\Gamma) \cdot a^{\frac{m}{d}}}_{\beta})$$

$\frac{m}{d}$
 $\frac{m}{d}$
 $K - F - E$

Extensiones trascendentes:

Def. • $\{t_1, \dots, t_n\}$ son alg. indep'tes sobre K si

$$f(t_1, \dots, t_n) = 0, f \in K[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow f = 0$$

• T un conjunto es alg. indep'te sobre K si

$\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T, \{t_1, \dots, t_n\}$ es alg. indep'te sobre K

Def. Dada E/K , $B \subseteq E$ es base de trascendencia, si B es un conjunto alg. indep'te maximal

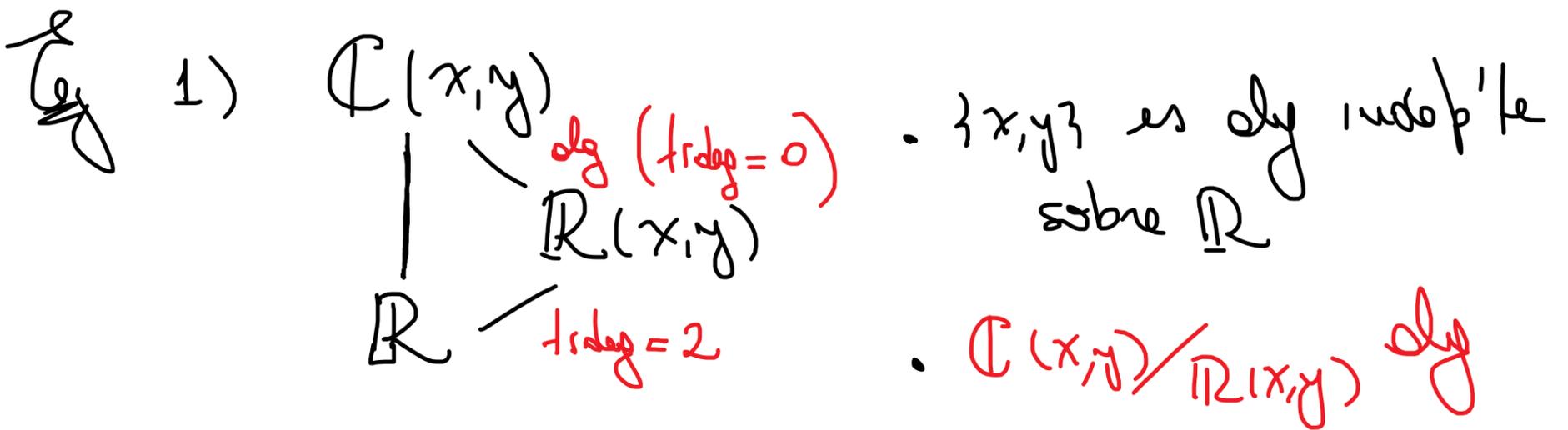
Obs. B es base de trasc. de E/K

\Leftrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \bullet B \text{ es alg. indep'te sobre } K \\ \bullet E/K(B) \text{ es algebraica} \end{array} \right.$

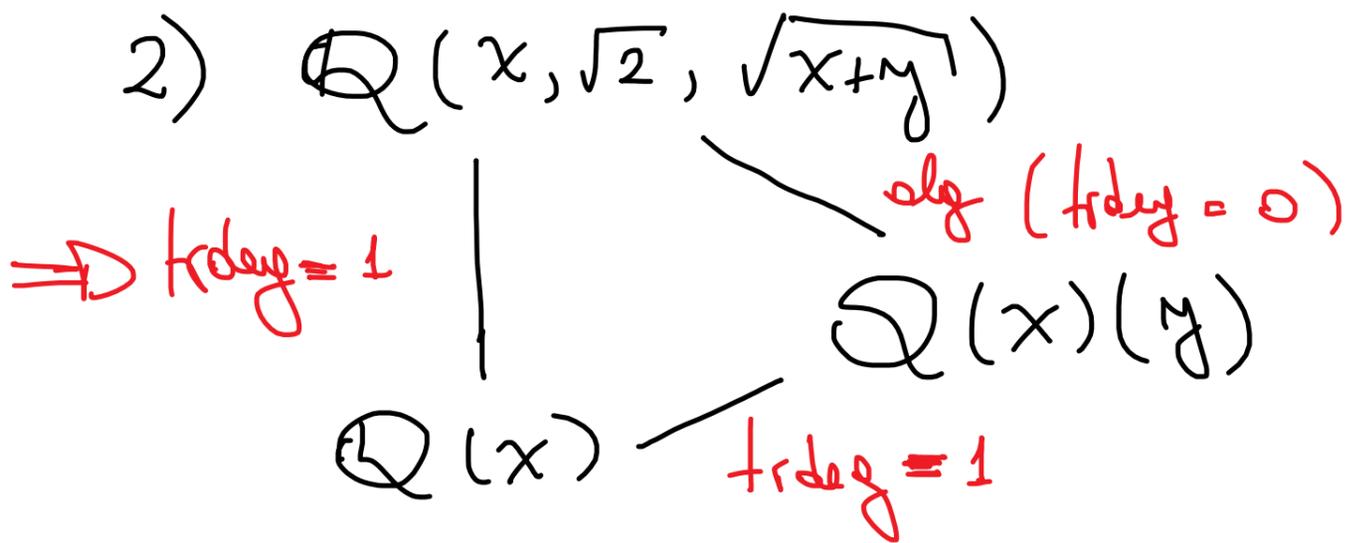
Teo. Siempre existe una tal base (que puede ser \emptyset)
y dos bases tienen igual cardinal

Def. $\text{trdeg}_{OE/K} := \# B$, con B base de trasc.

Prop. trdeg es aditivo por torres

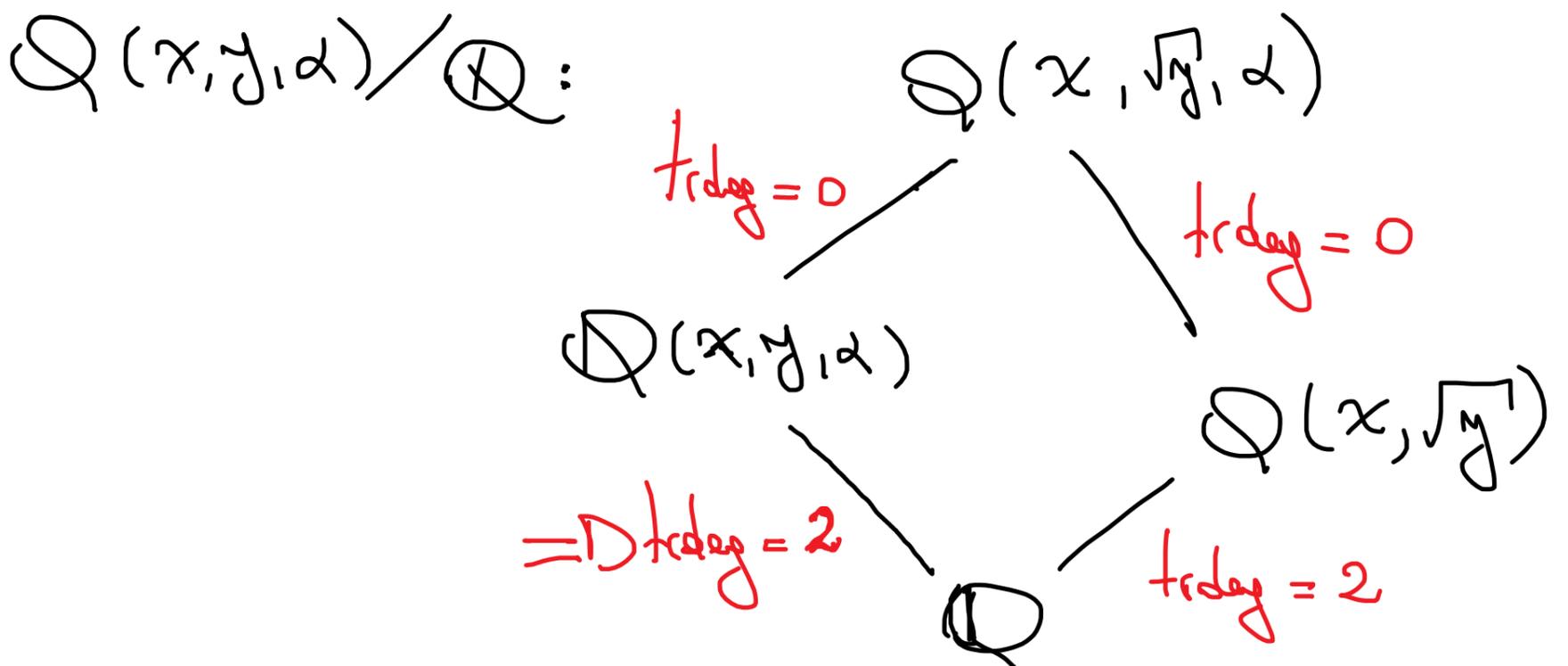


$\Rightarrow \text{trdeg } \mathbb{C}(x,y)/\mathbb{R} = 2$



3) $f = X^3 + 2xyX + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}(x, \sqrt{y})[X]$

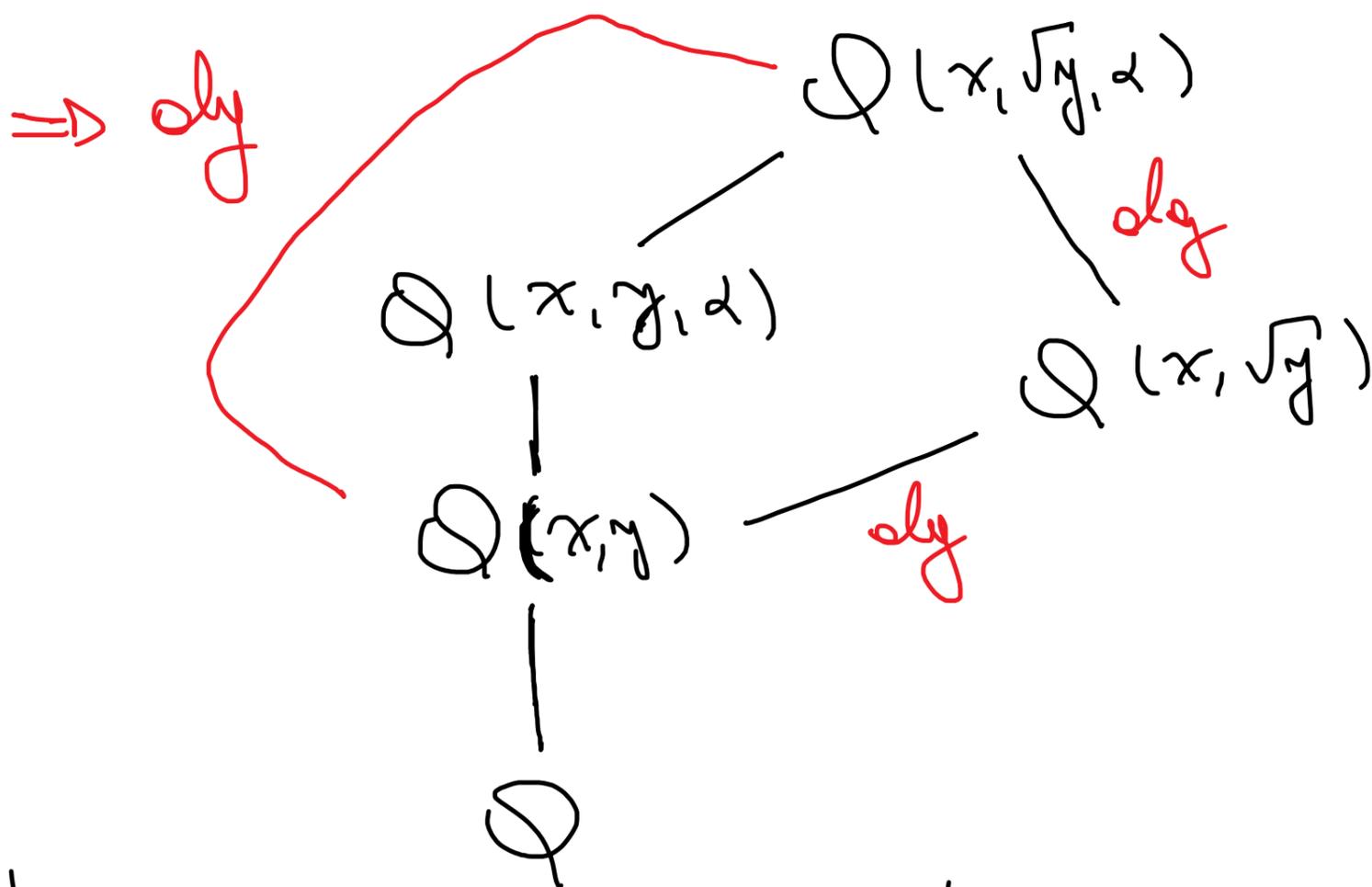
α raíz de f - calculamos trdeg de



Nota que: $\{x, \sqrt{y}\}$ es base de $\mathbb{Q}(x, \sqrt{y})$

$\{x, y\}$ también (de $\mathbb{Q}(x, \sqrt{y}, \alpha) / \mathbb{Q}$)

Pues



Observar que no necesariamente:

$$[E : k(B_1)] = [E : k(B_2)]$$

Aquí tenemos:

