Anillos:

Def. $(A, +, \cdot)$ más propiedades, para nosotros. conmutativo y $1 \neq 0$.

Ej: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, ..

Def^{s}: Sea A un anillo. (1)

- A es un dominio íntegro (DI) si $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $y = 0$
- $I \subseteq A$ es un ideal si $I \leq A$ es ~~un~~ subgrupo para '+' y $\forall a \in A, x \in I : ax \in I$
- A es un cuerpo si $A^{\times} = A - \{0\}$
- $P \subseteq A$ ideal, P es primo si $xy \in P \Rightarrow x \in P$ ó $y \in P$.
- $\mathfrak{m} \subseteq A$ ideal, $\mathfrak{m}$ es maximal si:

$$\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq A \Rightarrow \mathfrak{m} = I \text{ ó } I = A.$$

Obs. 1) $I \leq A$, ideal, se puede definir

$$A/I := \{\bar{a}, a \in A\} \text{ es un anillo con:}$$

$$\begin{cases} \bar{a} + \bar{a'} = \overline{a + a'} \\ \bar{a} \cdot \bar{a'} = \overline{a a'} \end{cases}$$

2) $P \subseteq A$, ideal primo $\Longleftrightarrow A/P$ es D.I

3) $\mathfrak{m} \subseteq A$, " maxl $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo

4) maxl $\Rightarrow$ primo

Ej: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[x]$, ... son DI

- $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, ... ~~$\mathbb{Z}_6$~~ $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ NO son D.I

Ej: $\{kn, k\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{Z}$, $\{x.f(x), f\in\mathbb{Q}[x]\}\subseteq\mathbb{Q}[x]$
son ideales. Notación: $\langle n\rangle$, $\langle x\rangle$

Obs. $\langle x\rangle\subseteq\mathbb{Z}[x]$ es primo, no mxl
$(\langle x\rangle \subsetneq \langle x,2\rangle \subsetneq \mathbb{Z}[x])$

. $\langle x\rangle\subseteq\mathbb{Q}[x]$ es mxl

(A mano: ~~Si~~: $\langle x\rangle\subseteq I\subseteq\mathbb{Q}[x]$,
si $\langle x\rangle\subsetneq I$, $\exists\, \alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ tq $\alpha\in I$
$\Rightarrow 1\in I \Rightarrow I=\mathbb{Q}[x]$)

Prop. $\displaystyle\bigcup_{\substack{\mathfrak{m}\subseteq A\\ \mathfrak{m}\text{ mxl}}}\mathfrak{m} = A\setminus A^{\times}$

Dem. $\subseteq)$ $x\in\mathfrak{m}\Rightarrow x\notin A^{\times}$
$\supseteq)$ $x\notin A^{\times}\Rightarrow\langle x\rangle\subsetneq A$
$\Rightarrow \exists\,\mathfrak{m}$ mxl / $\langle x\rangle\subseteq\mathfrak{m}$ ∎
ej 1

Morfismos de anillos: $f: A\to B$ es un morfismo de anillos si
$$\begin{cases} f(a+a')=f(a)+f(a')\\ f(a.a')=f(a).f(a')\\ f(1_A)=1_B\end{cases}$$

- f es mono si $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A\xrightarrow{f} B$: $fg=fh\Rightarrow g=h$
- f es epi si $A\xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$: $gf=hf\Rightarrow g=h$
- f es iso si $\exists\, g:B\to A$ morfismo tq $f\circ g=g\circ f=Id$

Obs MONO $\Leftrightarrow$ INY
EPI $\Leftarrow$ SURY

Ej 1) $\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ epi, no SURY.

$\left(\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \ : \ gi = hi \Rightarrow g = h \right)$

2) $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es SURY

En gral: $A \twoheadrightarrow A/I$

3) $\nexists \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ mono

$\left(0 = f(0) = f(n) = n \cdot f(1) \right)$

4) $\nexists \ \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \xrightarrow{f} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$

$2 = f(2) = f((\sqrt[3]{2})^3) = (f(\sqrt[3]{2}))^3$

Pero entonces $\exists \ a + b\sqrt{5}$ tq $(a+b\sqrt{5})^3 = 2$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Abs.

5) ¿$\exists \ \mathbb{Z}[i] \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$? morfismo

6) $\mathbb{Q}[x] \overset{f}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Q}$, $\ker(f) = \langle x \rangle$

$x \longmapsto 0$

$\Rightarrow \dfrac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x \rangle} \sim \mathbb{Q}$ como anillos

cuerpo

$\Rightarrow \langle x \rangle$ max

Def. Sea A un anillo:

- $p \in A \setminus A^{\times}$; es primo si $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ó $p \mid b$
- p " : es irreducible si $p = ab \Rightarrow a \in A^{\times}$ ó $b \in A^{\times}$

Def: Sea A un D.I.

i) A es euclídeo si $\exists g : A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ tq

I) $\forall a, b \in A \setminus \{0\}$, $a \mid b \Rightarrow g(a) \leq g(b)$

II) " , $\exists q, r \in A$ tq $\begin{cases} b = qa + r \\ r = 0 \text{ ó } g(r) < g(a) \end{cases}$

ii) A es principal si $\forall I \subseteq A$ ideal, $\exists x$ tq $I = \langle x \rangle$

iii) A es DFU si $\forall a \in A$, $a = p_1 \cdots p_r$, de manera "única" con p_i irreducibles.

Prop: 1) A es DFU $\Leftrightarrow$ [Irreducible $\Rightarrow$ Primo] (A DF)

2) A euclídeo $\Rightarrow$ A principal $\Rightarrow$ A DFU.

Obs. Primo $\Rightarrow$ irreducible

Ej.
- $\mathbb{Z}[x]$ DFU, no principal ($\langle 2, x \rangle$ no es ppal)
- $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ ppal, no euclídeo
- En $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, 2 es irreducible y no primo

Prop A DI, ppal $\Rightarrow$ [$P \subseteq A$ ideal primo ($P \neq \{0\}$) $\Rightarrow$ P max]

Dem. $P \subseteq A$ primo $\Rightarrow$ $P = \langle x \rangle$. (A es ppal)

Supongamos: $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle \subsetneq A$

Veamos que $\langle x \rangle = \langle y \rangle$.

Digamos: $x = y \cdot a \Rightarrow y \in \langle x \rangle$ ó $a \in \langle x \rangle$.

$\langle x \rangle$ primo

Supongamos que $y \notin \langle x \rangle \Rightarrow a \in \langle x \rangle$

Digamos: $a = x \cdot b$

O sea: $x = y x b$

$\Rightarrow \quad x \cdot (1 - yb) = 0$

$\Rightarrow \quad 1 - yb = 0 \Rightarrow y \in A^{\times}$ Abs

A es DI

(Pues $\langle y \rangle \neq A$)

$\blacksquare$

Cuerpo de Fracciones: Dado A: DI, en $A \times (A \setminus \{0\})$ se define: $(a,b) \sim (c,d)$ si $ad = bc$.

$\mathbb{K} := A \times (A \setminus \{0\}) / \sim$. En $\mathbb{K}$ se define:

$$\begin{cases} (a,b) + (c,d) = \cancel{\text{[illegible]}} = (ad + bc, bd) \\ (a,b) \cdot (c,d) = (a.c, bd) \end{cases}$$

Ej: $\text{Fracc}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

$\text{Fracc}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(x)$

$\mathbb{K}$-álgebras: A un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con una operación '$\cdot$' (en A) distributiva y bilineal:

$$\begin{cases} a.(b+c) = a.b + a.c \\ (a+b).c = a.c + b.c \\ a.(\lambda b) = (\lambda a).b = \lambda.(a.b) \end{cases}$$

$\mathbb{K}\times\mathbb{K}$: Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, se definen en $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$:

- $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

$(\mathbb{K}\times\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un anillo.

Obs:
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \sim \mathbb{C}$ (es un cuerpo)
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ no es un cuerpo.
- Si p es primo; $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

  $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ es cuerpo $\iff p \equiv 3\ (4)$