

## Algebra III

### Práctica 8 - Extensiones trascendentes

*2do cuatrimestre 2020*

**Ejercicio 1.** Sea  $E/K$  una extensión de cuerpos y sean  $t, t', \alpha \in E$ . Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando las respuestas:

1. Si  $t$  y  $t'$  son trascendentes sobre  $K$ , entonces  $tt'$  y  $t + t'$  no son ambos algebraicos sobre  $K$ .
2. Si  $t$  es trascendente sobre  $K$  y  $\alpha$  es algebraico sobre  $K$ , entonces  $t + \alpha$  es trascendente sobre  $K$ .
3. Si  $t$  es trascendente sobre  $K$  y  $\alpha$  es algebraico sobre  $K$ , entonces  $\alpha t$  es trascendente sobre  $K$ .
4. Si  $t$  y  $t'$  son trascendentes sobre  $K$ , entonces el conjunto  $\{t, t'\}$  es algebraicamente independiente sobre  $K$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $K$  un cuerpo y sean  $\alpha$  algebraico sobre  $K$  y  $t$  trascendente sobre  $K$ . Probar que  $f(\alpha, K) = f(\alpha, K(t))$  y que  $[K[\alpha] : K] = [K(t)[\alpha] : K(t)]$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $E = \mathbb{C}(X)[Y]/\langle f(X, Y) \rangle$  con  $f(X, Y) = Y^2 - (X - a)(X - b)(X - c)$ , para  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Probar que tanto  $\{X\}$  e  $\{Y\}$  son bases de trascendencia de  $E/\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos subextensiones de  $E/K$ . Probar que:

$$\text{trdeg}(L_1 L_2 / K) \leq \text{trdeg}(L_1 / K) + \text{trdeg}(L_2 / K).$$

Dar un ejemplo donde no valga la igualdad.

**Ejercicio 5.** Sea  $E$  un cuerpo algebraicamente cerrado y sea  $K$  un subcuerpo. Sea  $\varphi : E \rightarrow E$  un  $K$ -endomorfismo. Probar que si  $\text{trdeg}(E/K) < \infty$  entonces  $\varphi$  es un automorfismo. Mostrar que esto no tiene por qué valer si  $\text{trdeg}(E/K) = \infty$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $t$  trascendente sobre  $\mathbb{C}$  y sea  $K$  la clausura algebraica de  $\mathbb{C}(t)$ . Probar que  $K \simeq \mathbb{C}$ .

**Ejercicio 7.** ¿Cuál es el cardinal de una base de trascendencia de  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ ?

**Ejercicio 8.** Probar que  $\mathbb{C}$  tiene infinitos automorfismos de cuerpo. ¿Cuál es el cardinal del conjunto de automorfismos de  $\mathbb{C}$ ?

**Ejercicio 9.** Probar que  $\mathbb{C}$  tiene infinitos subcuerpos propios que son isomorfos a él.

**Ejercicio 10.** Sea  $K$  un cuerpo y  $E$  una  $K$ -álgebra finitamente generada. Probar que si  $E$  es un cuerpo entonces  $E/K$  es una extensión algebraica.