Álgebra III

Práctica 6 - Resolubilidad

2do Cuatrimestre 2020

Ejercicio 1. Sea G un grupo y sea H un subgrupo normal de G. Probar que si H y G/H son resolubles, entonces G es resoluble.

Ejercicio 2. Sea G un grupo y sea $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_r$ una cadena de subgrupos de G tal que G_i/G_{i+1} es abeliano para todo $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Probar que $G_i \supseteq G^{(i)}$ para todo i.

Ejercicio 3. Probar que:

1. Todo p-grupo es resoluble.
2. D_n es resoluble.
3. $\mathbb{S}_n$ es resoluble si y sólo si $n \leqslant 4$.

Ejercicio 4. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son resolubles por radicales:

1. $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i+\sqrt{3}\right]/\mathbb{Q}$
2. $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4-2)(X^2-5)$
3. $E/\mathbb{C}(a,b)$ cuerpo de descomposición de $f = X^2 + aX + b$
4. $E/\mathbb{C}(a,b,c)$ cuerpo de descomposición de $f = X^3 + aX^2 + bX + c$
5. $E/\mathbb{C}(a,b,c,d)$ cuerpo de descomposición de $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$

Ejercicio 5. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado primo $\geqslant 5$. Probar que si f tiene exactamente dos raíces no reales, entonces f no es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 6. Probar que ninguno de los siguientes polinomios es resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$.

1. $X^5 - 14X + 7$
2. $X^5 - 7X^2 + 7$
3. $X^7 - 10X^5 + 15X + 5$

Ejercicio 7. Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ irreducible de grado primo $p \geqslant 5$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ las raíces de f y sea $N = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_p]$ el cuerpo de descomposición de f sobre K. Probar que f es resoluble por radicales sobre K si y sólo si $N = K[\alpha_i, \alpha_j]$ para todos $1 \leqslant i < j \leqslant p$.

Ejercicio 8.

1. Sea $m \in \mathbb{N}$ par y sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ enteros positivos pares con $r > 1$ impar. Sea $f = (X^2+m)(X-a_1)\cdots(X-a_r) - 2$. Probar que:

   a) f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

   b) Para m suficientemente grande, f tiene exactamente dos raíces no reales en $\mathbb{C}$.

   c) (Difícil) Probar que el item anterior sigue valiendo si se quita la hipótesis "m suficientemente grande".

2. Deducir que para cada primo $p \in \mathbb{N}$, existe una extensión normal $E/\mathbb{Q}$ con grupo de Galois isomorfo a $\mathbb{S}_p$.

Ejercicio 9. (Artin-Schreier) Sea K un cuerpo de característica p.

1. Sea E una extensión cíclica de K de grado p. Probar que existe $\alpha \in E$ que satisface una ecuación $X^p - X - a$ para algún $a \in K$, tal que $E = K[\alpha]$.

2. Dado $a \in K$, probar que el polinomio $X^p - X - a$ o bien tiene una raíz en K, en cuyo caso tiene todas sus raíces en K, o bien es irreducible en $K[X]$. Probar que en este último caso, si α es una raíz, entonces $K[\alpha]$ es cíclico de orden p sobre K.

Ejercicio 10. Sea K con $\operatorname{car}(K) = p$. Una extensión separable E/K es *radical* si admite una torre de descomposición

$$K =: E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n := E$$

tal que para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene que E_i/E_{i-1} es de alguno de los tipos siguiente:

1. $E_i = E_{i-1}[\alpha]$ con $\alpha^q \in E_{i-1}$ con q primo, $q \neq p$,

2. $E_i = E_{i-1}[\alpha]$ con α raíz de $X^p - X - a$ para algún $a \in E_{i-1}$.

Una extensión separable E/K es *resoluble por radicales* si está contenida en una extensión radical. Probar que E/K separable es resoluble por radicales si y solo si existe una extensión Galois N/K con $E \subset N$ tal que $\operatorname{Gal}(N/K)$ es resoluble.