Algebra III

Práctica 4 - Extensiones de Galois y teorema

2do cuatrimestre 2020

Ejercicio 1. Sean E/K y L/K dos extensiones finitas. Probar que si E/K y L/K son K-isomorfas, entonces sus grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca? ¿Y si son extensiones de Galois?

Ejercicio 2. Para cada uno de los polinomios f del ejercicio 2 de la Práctica 3 caracterizar $\mathrm{Gal}(E/K)$, donde E es el cuerpo de descomposición de f sobre el cuerpo K indicado.

Ejercicio 3. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]$. Probar que $E/\mathbb{Q}$ es normal, calcular su grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y determinar todas sus subextensiones.

Ejercicio 4. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2-2)(X^2-3)(X^2-5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 5. Determinar todas las subextensiones cuadráticas del cuerpo de descomposición de X^4-2X^2-1 sobre $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 6. Sea $\Phi_n = f(\xi_n, \mathbb{Q})$ el n-ésimo polinomio ciclotómico. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que Φ_n es irreducible en $K[X]$. Probar que $K[\xi_n]/K$ es normal de grado $\varphi(n)$ y que $\mathrm{Gal}(K[\xi_n]/K) \cong \mathcal{U}_n$.

Ejercicio 7. Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$, y sea $\alpha, \beta \in K$ tales que α, β y $\alpha\beta$ no son cuadrados en K. Si $a^2 = \alpha$ y $b^2 = \beta$, caracterizar $\mathrm{Gal}(K[a,b]/K)$.

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

1. Sea E/K una extensión de Galois tal que $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Probar que $E = K[a,b]$ con $a^2, b^2 \in K$.
2. Generalizar el resultado de (1) para $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos).

Ejercicio 9.

1. Probar que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{11})]$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$.
2. Probar que $\mathbb{Q}[\xi_{11}]/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2. Determinarla.

Ejercicio 10. Sea E/K una extensión de Galois de grado 15. Probar que E/K tiene solo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones son normales.

Ejercicio 11. Sea E/K una extensión de Galois de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces es normal.

Ejercicio 12. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión de Galois de grado $p^n s$ con $n, s \in \mathbb{N}$ y $p \nmid s$. Probar que:

1. E/K tiene subextensiones de grado s y todas ellas son isomorfas.
2. Si $p > s$ entonces hay una única subextensión de grado s, que además, resulta ser normal.

Ejercicio 13. Sea E/K una extensión algebraica. Probar que existe una subextensión L/K abeliana maximal (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas). ¿Cual es en el caso en que E es el cuerpo de descomposición de X^4-2 sobre $\mathbb{Q}$?

Ejercicio 14.

1. Sean E/K y F/K dos subextensiones finitas de una extensión L/K . Probar que EF/K es abeliana si y solo si E/K y F/K son abelianas.
2. Exhibir dos subextensiones finitas $E/\mathbb{Q}$ y $F/\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ tales que $EF/\mathbb{Q}$ es de Galois pero ni $E/\mathbb{Q}$ ni $F/\mathbb{Q}$ lo son.

Ejercicio 15. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible con exactamente una raíz real y $\mathrm{gr}(f) \geqslant 2$. Sea E el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Probar que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

Ejercicio 16. Sea $E = \mathbb{C}(X)$ y sean $f, g \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{C})$ dados por $f(X) = X^{-1}$ y $g(X) = \xi_n X$, donde $\xi_n \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Probar que:

1. $f^2 = g^n = \mathrm{id}_E$ y $fg = g^{-1}f$.
2. El subgrupo H generado por f y g es isomorfo a D_n.
3. $E^H = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.