

Algebra III

Práctica 1 - Anillos y Cuerpos

2do cuatrimestre 2020

Nota: En esta materia, anillo significa anillo conmutativo con $1 \neq 0$ y todo morfismo de anillo $f : A \rightarrow B$ manda el 1_A en el 1_B .

Ejercicio 1. Sea A un anillo. Probar que:

1. A tiene ideales maximales y todo ideal propio I está contenido en un ideal maximal.
2. P es ideal primo si y sólo si A/P es dominio íntegro.
3. A es cuerpo si y sólo si tiene exactamente dos ideales.
4. M es ideal maximal si y sólo si A/M es cuerpo.

Ejercicio 2. Probar que:

1. Si K es cuerpo y $f : K \rightarrow B$ es morfismo de anillos, entonces f es inyectivo.
2. Si A es anillo tal que todo morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ es inyectivo, entonces A es cuerpo.

Ejercicio 3. Sea D un dominio íntegro finito. Probar que D es un cuerpo.

Ejercicio 4. Dado $b \in \mathbb{C}$ se define $\mathbb{Q}[b] = \{\sum_{i=0}^n a_i b^i / a_i \in \mathbb{Q}\}$. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[i]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ son cuerpos.

Ejercicio 5. Sea K un cuerpo y sea A una K -álgebra de dimensión finita. Probar que si A es un dominio íntegro, entonces es un cuerpo.

Ejercicio 6. Determinar el grupo de unidades $\mathcal{U}(A)$ de los siguientes anillos A :

$$\mathbb{Z}, K \text{ (cuerpo)}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], D[X] \text{ con } D \text{ dominio íntegro}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Ejercicio 7. Caracterizar los siguientes conjuntos:

1. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ isomorfismo de cuerpos}\}$.
2. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ morfismo de cuerpos}\}$.
3. $\{f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, f \text{ morfismo de cuerpos}, p \text{ primo}\}$.
4. $\{f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ morfismo de cuerpos}, \mathbb{K} \text{ cuerpo fijo}\}$.
5. $\{f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{3}], f \text{ morfismo de cuerpos}\}$.
6. $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ morfismo de cuerpos tal que } f(a) = a \forall a \in \mathbb{R}\}$.
7. $\{f : \mathbb{Q}[i] \rightarrow \mathbb{Q}[i], f \text{ morfismo de cuerpos}\}$.
8. $\{f : \mathbb{Q}[i] \rightarrow \mathbb{Q}[i], f \text{ isomorfismo de cuerpos}\}$.
9. $\{f : \mathbb{Q}[i] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ morfismo de cuerpos}\}$.
10. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ morfismo de cuerpos}\}$.

Ejercicio 8. Sea A un dominio íntegro y sea K su cuerpo de cocientes.

1. Probar que $f : A \rightarrow K$ dada por $a \mapsto \frac{a}{1}$ es un monomorfismo de anillos.
2. Sea D un anillo. Probar que son equivalentes:
 - a) D es dominio íntegro.
 - b) Existe $f : D \rightarrow K$ monomorfismo de anillos para algún cuerpo K .

Ejercicio 9. Caracterizar el cuerpo de cocientes de los siguientes dominios íntegros:

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{2}], A[X] \text{ (} A \text{ dominio íntegro), } K \text{ (} K \text{ cuerpo)}.$$

Ejercicio 10. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in A$. Probar que:

1. Si a es primo entonces es irreducible.
2. Si A es DFU, entonces todo irreducible es primo.
3. Dar ejemplos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ de elementos que sean irreducibles pero no primos.

Ejercicio 11. Sea A un dominio íntegro. Probar que valen las siguientes implicaciones pero no las recíprocas:

$$A \text{ es euclideo} \implies A \text{ es principal} \implies A \text{ es DFU}.$$

Ejercicio 12. Probar que $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], K$ y $K[X]$ (K cuerpo) son anillos euclideos.

Ejercicio 13. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Probar que:

1. -1 es un cuadrado en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si y sólo si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod{4}$.
2. p es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si p no es suma de dos cuadrados (en \mathbb{Z}).
3. p es primo en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si $p \equiv 3 \pmod{4}$.
4. p es suma de dos cuadrados (en \mathbb{Z}) si y sólo si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Ejercicio 14. Sea A un DFU, K su cuerpo de cocientes y $f \in A[X]$ con $\text{gr}(f) \geq 1$. Probar que:

1. $A[X]$ es DFU.
2. f es irreducible (en $A[X]$) si y sólo si f es irreducible en $K[X]$ y $\text{cont}(f) = 1$.

Ejercicio 15. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X]$.

1. Probar que $K[X]/\langle f \rangle$ es un cuerpo si y sólo si f es irreducible.
2. Construir un cuerpo de 9 elementos.
3. Probar que $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \simeq \mathbb{C}$.
4. Supongamos que $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ con los $\alpha_i \in K$ todos distintos. Sea $g_j := \prod_{i \neq j} (X - \alpha_i)$, $1 \leq j \leq n$. Probar que $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$ es base de $K[X]/\langle f \rangle$, y para un $h \in K[X]$, calcular las coordenadas de \bar{h} en esa base.

Ejercicio 16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Definimos $\Phi : \mathbb{Z}[X] \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ mediante:

$$\Phi(a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0) = \overline{a_n} X^n + \cdots + \overline{a_1} X + \overline{a_0}.$$

Probar que:

1. Φ es un morfismo de anillos.
2. Para un $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\Phi(f) \neq 0$ y $\text{gr}(\Phi(f)) = \text{gr}(f)$, si $\Phi(f)$ es irreducible en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, entonces f no se factoriza en $\mathbb{Z}[X]$ como producto de polinomios de grado positivo.

Ejercicio 17. *Criterio de irreducibilidad de Eisenstein.* Sea A un DFU y sea K su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ con $n > 0$. Probar que si existe un primo $p \in A$ que satisface $p \nmid a_n$, $p \mid a_i \forall 0 \leq i < n$ y $p^2 \nmid a_0$, entonces f es irreducible en $K[X]$.

Ejercicio 18. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Probar que:

1. $(X+1)^p - 1$ es divisible por X y $\frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} X^{p-i-1} \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible.
2. $1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}$ es irreducible.
3. $X^n - p$ es irreducible $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 19. Sea K un cuerpo y sea $a \in K$. Probar que $X^4 - a$ es reducible en $K[X]$ si y solo si $a = b^2$ para algún $b \in K$ o $a = -4c^4$ para algún $c \in K$.

Ejercicio 20. *Teorema de Gauss.* Sea A un DFU y sea K su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 a_n \neq 0$. Demostrar que si $p, q \in A$ son irreducibles coprimos tales que $f(p/q) = 0$, entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Ejercicio 21. Sea K un cuerpo. Sea $f \in K[X]$ y sea $a \in K$ una raíz de f . Probar que:

1. a es raíz múltiple de f si y sólo si $f'(a) = 0$.
2. Si $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ o \mathbb{Q} entonces $\frac{f}{\text{mcd}(f, f')} \in K[X]$ tiene las mismas raíces que f pero todas simples.

Ejercicio 22. Probar que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible, entonces no tiene raíces múltiples en \mathbb{C} .

Ejercicio 23. Probar que $\sum_{i=0}^n X^i$ y $\sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}$ no tienen raíces múltiples en \mathbb{C} para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 24. Determinar todos los polinomios irreducibles en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ de grado < 6 .

Ejercicio 25. Sea K un cuerpo finito de q elementos. ¿Cuántos polinomios irreducibles mónicos de grado 2 hay en $K[X]$? ¿Y de grado 3?

Ejercicio 26. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ con $a_n \neq 0$. Definimos $M = 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$. Probar que:

1. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f , entonces $|\alpha| < M$.
2. Si $f \in \mathbb{R}[X]$, entonces: $f(M) > 0 \iff a_n > 0$ y $f(-M) > 0 \iff (-1)^n a_n > 0$.

Ejercicio 27. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \in \mathbb{C}[X]$ con $a_n \neq 0$ y $n \geq 2$. Se define el discriminante de f mediante:

$$\Delta(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Probar que:

1. Si $f = aX^2 + bX + c$, entonces $\Delta(f) = b^2 - 4ac$.
2. Si $f = X^3 + pX + q$, entonces $\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$.
3. $\text{Res}_X(f, f') = a_n^{n-1} \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n \Delta(f)$.

Ejercicio 28. Sea K un cuerpo. Para un polinomio

$$f = \sum_{|\mathbf{a}| \leq d} f_{\mathbf{a}} \mathbf{X}^{\mathbf{a}} \in K[\mathbf{X}] := K[X_1, \dots, X_n],$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $|\mathbf{a}| = a_1 + \dots + a_n$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ y $\mathbf{X}^{\mathbf{a}} = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$, se define el grado de f como $\text{gr}(f) = \max\{|\mathbf{a}| : f_{\mathbf{a}} \neq 0\}$.

Probar las siguientes afirmaciones:

1. $f + g = 0$ o $\text{gr}(f + g) \leq \max\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$, $\forall f, g \in K[\mathbf{X}]$.
2. $f g = 0 \implies f = 0$ o $g = 0$, $\forall f, g \in K[\mathbf{X}]$.
3. Si $f \neq 0$ y $g \neq 0$ entonces $\text{gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$, $\forall f, g \in K[\mathbf{X}]$.
4. $\mathcal{U}(K[\mathbf{X}]) = K - \{0\}$.
5. $K[\mathbf{X}]$ es un K -espacio vectorial. Exhibir una base.
6. $K[\mathbf{X}]_{\leq d} = \{f : f = 0 \text{ o } \text{gr}(f) \leq d\}$ es un subespacio de $K[\mathbf{X}]$. Calcular su dimensión.

Ejercicio 29. Probar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$ respectivamente.

Ejercicio 30. Sea $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ de grado $\leq d$. Probar que:

1. Si f se anula en \mathbb{Z}^n , entonces $f = 0$.
2. Lo mismo si f se anula en $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq x_i \leq d\}$.

Ejercicio 31. Sean $f = XY - 1$ y $g = X^2 + Y^2 - 2$. Calcular $\text{Res}_X(f, g)$ y decidir si f y g tienen un factor común en $\mathbb{Q}(Y)[X]$ y en $\mathbb{Q}[X, Y]$. ¿En que puntos de \mathbb{C}^2 se anulan simultáneamente ambos polinomios?

Ejercicio 32. Sean $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \in \mathbb{C}[X]$ y $g = \prod_{j=1}^m (X - \beta_j) \in \mathbb{C}[X]$.

- i) ¿Cuáles son las raíces del polinomio $\text{Res}_Y(f(X - Y), g(Y)) \in \mathbb{C}[X]$?
- ii) ¿Y cuáles las de $\text{Res}_Y(Y^n f(X/Y), g(Y)) \in \mathbb{C}[X]$?
- iii) Probar que $a = \prod(\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \dots \pm \sqrt{n})$ es entero.
- iv) (*Difícil*) Probar que a de (iii) es un cuadrado perfecto para todo $n \geq 2$.