Análisis Numérico

Segundo Cuatrimestre 2020

Práctica N° 1: Diferencias Finitas (Introducción)

Problemas de Valores Iniciales

Ejercicio 1 Dada una constante $a > 0$, se considera el problema para $t > 0$.

$$y'(t) = -ay(t) \qquad y(0) = 1$$

y se propone el método multipaso que resulta de aplicar diferencias centradas en Δt, dado por

$$\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\Delta t} = -ay^n \quad y_0 = 1, y_1 = \alpha$$

(a) Muestre que el método propuesto para los nodos $n > 1$ es de orden 2.

(b) ¿Cómo puede elegirse α para que el error de truncado en y_1 también sea $O((\Delta t)^2)$?

(c) Muestre que el método es 0-estable y que por lo tanto converge.

Ejercicio 2 Dada una constante $\lambda > 0$, se considera el problema para $t > 0$.

$$u'(t) = -\lambda(u - \cos(t)) - \sin(t) \qquad u(0) = 1$$

cuya solución exacta para todo λ es $u(t) = \cos(t)$.

(a) Muestre que el método de Euler de un paso es convergente para este problema.

(b) De la cota del error global para métodos de un paso, ¿Cuán pequeño hay que tomar Δt si se quiere garantizar que el error a tiempo $t = 2$ es menor que 10^{-4} en el caso $\lambda = 2100$?

Ejercicio 3 Dada una constante $a > 0$, considere el problema de valores iniciales para $t > 0$.

$$y'(t) = -ay(t) \qquad y(0) = 1$$

Para cada paso temporal Δt fijo se considere la discretización de Adams-Moulton de 1 paso:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -a\left(\frac{1}{2}y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n\right)$$

(a) Muestre que el error de truncado en Δt es de órden 2.

(b) Muestre que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ para todo Δt.

Ejercicio 4 Considere el problema

$$y''(t) = -ay(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad 0 < t < T_f,$$

y la discretización explícita de 2 pasos

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{(\Delta t)^2} = -ay^n.$$

Muestre que $|y^n| \to \infty$ si $\Delta t > 2/\sqrt{a}$, y que en caso contrario $|y^n|$ permanece acotado. **Sug.** Reemplace $y_n = \lambda^n$ y resuelva una ecuación de recurrencia para λ.

Problemas de Valores de Contorno

Ejercicio 5 Las siguientes son versiones de orden 2 de las diferencias forward o backward, que utilizan nodos a un solo lado de x.

(a) Verifique que la siguiente fórmula para la derivada primera tiene orden $O(h^2)$:

$$u'(x) \sim -\frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h)\right)$$

(b) Halle una fórmula de aproximación para la derivada segunda $u''(x)$ que utilice los valores de u en $x, x+h$ y $x+2h$. ¿Cuál es el orden que resulta en este caso?

Ejercicio 6 (Condiciones de Neumann). Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de Neumann en $x = 0$ y de Dirichlet en $x = 1$,

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ u_x(0) = & 0 \\ u(1) = & 0. \end{cases} \tag{1}$$

Obtenga matrices para el problema discreto, si para la condición de Neumann $u_x(0) = 0$ se realizan las siguientes aproximaciones:

(a) $U_1 - U_0 = 0$ (diferencias forward)

(b) $U_1 - U_{-1} = 0$ (diferencias centradas y nodo ficticio)

(c) $\frac{3}{2}U_0 - 2U_1 + \frac{1}{2}U_2$ (diferencias forward de orden 2 del Ej. 5)

Sug. Para el caso del nodo ficticio, añada la ecuación $1/h^2\,(U_{-1} - 2U_0 + U_1) = f(x_0)$.

(a) ¿Cuál es el orden del error de truncado en los nodos interiores?

(b) Y para el punto $x = 0$, ¿Cuál es el orden del error de truncado de las distintas discretizaciones propuestas?

Ejercicio 7 Muestre que para una matriz A normal se tiene $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Ejercicio 8 Exhiba una matriz A para la cual $\rho(A) < 1$ y sin embargo $||A||_2 > 1$.

Problemas semi-discretos

Ejercicio 9 Muestre que para el espacio $E = \Big(\mathbb{C}^\infty([0,1], \|\cdot\|_\infty\Big)$ de funciones infinitamente derivables dotado con la norma infinito, el operador $L : E \to E$ dado por $L(U) = U_x$ no es continuo y por consiguiente tampoco es Lipschitz.

Ejercicio 10 Se considera el problema de la ecuación en derivadas parciales:

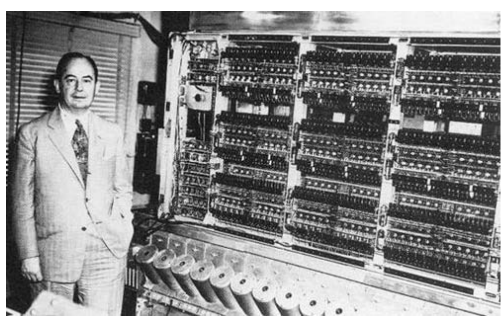
$$\begin{cases} U_t(t,x) = & U_{xx}(t,x), \quad x \in (0,1) \quad 0 < t \leq t_F \\ U(t,0) = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \leq t \leq t_F \\ U(t,1) = & 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \leq t \leq t_F \\ U(0,x) = & U_0(x) \qquad\quad x \in (0,1) \qquad\qquad . \end{cases} \tag{2}$$

Tomando una grilla equiespaciada en la variable x dada por $\{x_i = ih\}_{0 \leq i \leq N}$ con $h = 1/N$, definimos para cada t el vector $\tilde{U}(t) = \Big(U(x_0,t), \ldots, U(x_n,t)\Big)$ y consideramos la siguiente *semi-discretización* del problema original

$$\tilde{U}_t = A_h(\tilde{U}) \qquad \text{donde} \quad A_h(\tilde{U}) = \frac{\tilde{U}(x_{i+1},t) - 2\tilde{U}(x_i,t) + \tilde{U}(x_{i-1},t)}{h^2} \tag{3}$$

(a) De varios ejemplos de métodos totalmente discretos que resultan de resolver, para cada h fijo, el problema de valores iniciales para el sistema de EDO dado por (3) mediante métodos de un paso o multi-paso.

(b) Muestre que el operador $A_h : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^{N-1}$ es de Lipschitz con constante $\frac{1}{h^2}$ en la norma infinito, y que por lo tanto, para cada h fijo, puede aplicarse la teoría de convergencia de métodos para sistemas de EDO de las discretizaciones dadas en el punto anterior.



John von Neumann
Budapest 1903 - Washington 1957