Topología

Segundo cuatrimestre - 2019
Práctica 6
Homotopía y grupo fundamental

---

1. Probar que si $h, h' : X \to Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \to Z$ son homotópicas, entonces $kh, k'h' : X \to Z$ son homotópicas.

2. (a) Probar que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces X es contráctil. Concluir que I y $\mathbb{R}$ son contráctiles.
   (b) Probar que si X es contráctil, entonces X es arcoconexo.

3. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de X a Y.
   (a) Probar que si Y es contráctil entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.
   (b) Probar que $[*, Y] = \pi_0(Y)$ para todo espacio Y.
   (c) Probar que si X es contráctil e Y es arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.

4. Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.

5. Sea G un grupo topológico y sea X un espacio. Probar que $[X, G]$ es un grupo con la operación $[f].[g] = [f.g]$, donde $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.

6. Sean $f : X \to Y$ continua y Z otro espacio topológico. Definimos
$$f^* : [Y, Z] \to [X, Z], \quad f^*([g]) = [gf],$$
$$f_* : [Z, X] \to [Z, Y], \quad f_*([h]) = [fh].$$
   (a) Probar que f^* y f_* están bien definidas.
   (b) Probar que si $f \cong g$ entonces $f^* = g^*$ y $f_* = g_*$.
   (c) Deducir que si f es equivalencia homotópica entonces f^* y f_* son biyecciones.

7. Probar que una equivalencia homotópica induce una biyección en los π_0. Deducir que si dos espacios X e Y tienen el mismo tipo homotópico, entonces uno es arcoconexo si y sólo si el otro lo es. Probar también que X es conexo si y sólo si Y es conexo.

8. Sean $f, g : X \to Y$ tal que $f \cong g$. Probar que f es equivalencia homotópica si y solo si g lo es.

9. (a) Hallar $f : X \to Y$ tal que f tenga inversa homotópica a izquierda pero no a derecha.
   (b) Probar que si $f : X \to Y$ tiene inversa homotópica a izquierda y a derecha entonces es equivalencia homotópica.

10. Probar que $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica si y sólo si existen $g, h : Y \to X$ tales que fg y hf son equivalencias homotópicas.

11. Sea X el peine
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1, x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) | y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$
Sea $x_0 = (0, 1) \in X$. Probar que X es contráctil pero no existe una homotopía entre 1_X y c_{x_0} que sea relativa a x_0 (es decir que toda homotopía entre la identidad y la función constante x_0 va moviendo al punto durante la deformación).

12. Sea X el peine y sea $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Probar que $i : X \to I^2$ es un retracto por deformación débil pero no es un retracto por deformación fuerte.

13. Sea C un subespacio convexo de R^n y sea x_0 un punto de C. Probar que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación fuerte de C.

14. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega X = \{\omega : I \to X \ , \ \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$$

con la topología del subespacio de la compacto abierta. Probar que

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X).$$

15. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f]/\, f : S^1 \to X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g \operatorname{rel} \{s\}$. Probar que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

16. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega,\omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

17. Sea $A \subset X$ y sea $r : X \to A$ una retracción. Dado $a \in A$, probar que

$$r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$$

es suryectivo.

18. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio, y sea $f : A \to X$ una función continua. Probar que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \to X$, entonces para todo $a \in A$ el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

19. Sea G un grupo topológico con multiplicación $\cdot$ y elemento neutro x_0. Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \odot g$ por $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.

    (a) Mostrar que $\Omega(G, x_0)$ es un grupo con la operación con $\odot$.

    (b) Mostrar que $\odot$ induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, x_0)$, que por abuso notaremos $\odot$.

    (c) Probar que $\odot$ coincide con $\cdot$ en $\pi_1(G, x_0)$.

    (d) Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.