

# Topología

Segundo cuatrimestre - 2019

Práctica 7

## Revestimientos y Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

---

### Revestimientos.

1. Probar que si  $X$  es un espacio e  $Y$  es discreto, entonces la proyección  $p_X : X \times Y \rightarrow X$  es un revestimiento.
2. Probar que si  $p : E \rightarrow B$  es un revestimiento, la fibra  $E_b = p^{-1}(b)$  es un subespacio discreto de  $E$  para todo  $b \in B$ . Probar además que si  $B$  es conexo, todas las fibras tienen el mismo cardinal.
3. Probar que las siguientes funciones son revestimientos:
  - a)  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(x) = (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x))$ .
  - b)  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  fijo.
  - c)  $p : S^n \rightarrow P^n$  la proyección al plano proyectivo.
  - d)  $G$  grupo topológico,  $H$  subgrupo discreto de  $G$  y  $p : G \rightarrow G/H$  la proyección al cociente.
  - e)  $p : E \rightarrow B$ ,  $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ , donde  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$  y  $B = \{(z, w) \in S^1 \times S^1 : z = 1 \text{ ó } w = 1\}$ .
4. Probar que  $p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1$  definida por  $p(x) = (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x))$  es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.
5. Probar que si  $p : E \rightarrow B$  es un revestimiento, entonces  $p$  es abierta y por lo tanto es cociente.
6. Probar que si  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  son revestimientos, entonces  $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$  también lo es. Usar este resultado para calcular el grupo fundamental del toro.
7. Sean  $p : X \rightarrow Y$  y  $q : Y \rightarrow Z$  revestimientos. Probar que si  $q^{-1}(z)$  es finito para cada  $z \in Z$ , entonces  $qp : X \rightarrow Z$  es un revestimiento.
8. Probar que los revestimientos son estables por cambio de base. En particular, si  $p : E \rightarrow B$  es revestimiento y  $A \subset B$ , entonces  $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  es revestimiento.
9. Sea  $B$  un espacio conexo y localmente conexo, y sea  $p : E \rightarrow B$  un revestimiento. Probar que si  $C$  es una componente conexa de  $E$ , entonces  $p|_C : C \rightarrow B$  es un revestimiento.
10. Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  el revestimiento usual. Probar que  $f : X \rightarrow S^1$  puede levantarse a una función continua  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $p\tilde{f} = f$  si y sólo si  $f$  es homotópica a una constante.

11. Sea  $G$  un grupo topológico y  $X$  un  $G$ -espacio (ver ej. 31 práctica 2). Decimos que la acción es *libre* si  $gx \neq x$  para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$ ,  $g \neq e$ . Decimos que la acción es *propiamente discontinua* si para todo  $x \in X$  existe  $U$  entorno abierto de  $x$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G$ ,  $g \neq e$ .
- Probar que si  $G$  es finito,  $X$  es Hausdorff y la acción es libre, entonces es propiamente discontinua.
  - Probar que si  $G$  actúa en  $X$  y la acción es propiamente discontinua, entonces la proyección  $p : X \rightarrow X/G$  es un revestimiento.
  - Sea  $X = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ . Sea  $G \subset \text{Aut}(X)$  el subgrupo generado por  $\phi$ , donde  $\phi(z) = \bar{z} + 1 + i$ . Probar que la acción de  $G$  en  $X$  es propiamente discontinua, y que  $X/G$  es homomomorfo a la banda de Möbius.
  - Calcular el grupo fundamental de la banda de Möbius.

### Aplicaciones del Teorema de Brouwer y Borsuk-Ulam.

- Demostrar que si  $A$  es un retracto del disco  $D^2$ , entonces toda función continua  $f : A \rightarrow A$  tiene un punto fijo.
- Demostrar que si  $f : S^1 \rightarrow S^1$  es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = -x$ .
- Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Probar que si  $S^2$  se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.
- Probar que si  $f : S^2 \rightarrow S^2$  es continua y  $f(x) \neq f(-x)$  para todo  $x$ , entonces  $f$  es sobreyectiva.