Topología

Segundo cuatrimestre - 2019

Práctica 2

Funciones continuas, Subespacios, Productos y Cocientes

Funciones continuas

1. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ es equivalente a pedir que f sea continua

   (a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathscr{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$

   (b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$ se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$

   (c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

   (d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

   (e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

2. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$
   Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

3. (a) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Probar que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

   (b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.

   (c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
   Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

4. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

   (a) Probar que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

   (b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Probar que h es continua.

5. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \displaystyle\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

   (a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

   (b) Probar que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

   (c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

   (d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

Subespacios, productos y cocientes

6. Consideremos a $I = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{lll} A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\} & B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\} & C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} \\ D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\} & E = \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\} & F = \{x : |x| \leq 1\} \end{array}$$

7. Sea X un conjunto ordenado, equipado con la topología del orden, y sea $Y \subset X$.
   (a) Probar que la topología del orden en Y no coincide en general con la topología de subespacio. Comparar estas dos topologías.
   (b) Y se dice **convexo** si satisface $a, b \in Y \Rightarrow (a, b) \subset Y$. Probar que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.

8. Probar que si $Z \subset A$ y A es subespacio de X, entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio de X.

9. Sean A un subespacio de X y B un subespacio de Y. Probar que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.

10. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas. Hallar ejemplos en los que no sean cerradas.

11. Sean X, Y, Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \to Z$ una función. f se dice **continua en** x si $f(-, y) : X \to Z$ es continua para todo $y \in Y$. Analogamente, f se dice **continua en** y si $f(x, -) : Y \to Z$ es continua para todo $x \in X$.
    (a) Probar que si f es continua, entonces es continua en cada variable.
    (b) Hallar un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.

12. (a) Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ es la topología discreta en $\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.
    (b) Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.

13. Sea $\mathbb{R}_l$ la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

14. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

15. (a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.
    (b) Sea X un conjunto con una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua.
    Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.

16. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subset X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?
    (a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X.

(b) $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

17. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i\in I} X_i$. Probar que $x_\alpha \to x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \to p_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto ésto si se toma en X la topología caja?

18. Se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada como $\overline{d}(a,b) = \min\{|a-b|, 1\}$. Probar que induce la misma topología que la usual. Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como $\overline{\rho}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_n\{\overline{d}(a_n,b_n)\}$. Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

19. Decidir si las siguientes funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la toplogía usual y tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme, la topología producto y la topología caja.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots) \qquad g(t) = (t, t, t, \ldots) \qquad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \ldots)$$

20. Decidir si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con las topologías uniforme, producto y caja.

    (a) $(1,1,1,1,\ldots), (0,2,2,2,\ldots), (0,0,3,3,\ldots)$, ...
    (b) $(1,1,1,1,\ldots), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right), \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, ...
    (c) $(1,0,0,0,\ldots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots)$, ...
    (d) $(1,1,0,0,\ldots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots)$, ...

21. Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a las topologías uniforme, producto y caja.

22. Sea $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $f : X \to \prod X_i$ la función definida por
$$f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$$
Sea Z la imagen de f. Probar que $f : X \to Z$ es abierta.

23. Sea X un espacio topológico, y sea $S = \{0,1\}$ el espacio de **Sierpinski**, cuyos abiertos son $\emptyset, \{1\}$ y S. Probar que $A \subset X$ es abierto si y sólo si la función característica de A, $\chi_A : X \to S$, es continua. Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U\in\mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X.

24. Probar que si $f : X \to Y$ es inyectiva y final entonces es subespacio.

25. Probar que si $f : X \to Y$ es suryectiva e inicial, entonces es cociente.

26. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

27. Sea $p_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

    (a) Sea X el subespacio $(\{0\}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, y sea $g = p_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.

    (b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, y sea $h = p_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

28. Caracterizar el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ en cada uno de los siguientes casos.

    (a) $(x_0,y_0) \sim (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.

    (b) $(x_0,y_0) \sim (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

29. Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula

$$\begin{cases} g((x,y)) &= (x,0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0,y)) &= (0,y) \end{cases}$$

   (a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

   (b) Hallar una base para la topología cociente en Z inducida por g.

30. Sea $X = \mathbb{C} \times \{0,1\}$ con la topología producto, $\{0,1\}$ con la topología discreta. Definimos en X la relación de equivalencia

$$(z,0) \sim (w,1) \Leftrightarrow z.w = 1, \quad (z,j) \sim_2 (w,j) \Leftrightarrow z = w$$

Se le da a $X/_\sim$ la topología cociente. Probar que $f : X \to S^2$ definida por

$$f(x+iy,j) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2) & \text{si } j = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, -2y, x^2+y^2-1) & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

induce un homeomorfismo $\overline{f} : X/_\sim \to S^2$.
Sugerencia: Probar que $\overline{f}$ es biyectiva; probar la continuidad de la inversa en los abiertos $S^2 \setminus \{P_N\}$, $S^2 \setminus \{P_S\}$, donde P_N y P_S son los polos.

31. Sea G un grupo. Un **G-espacio** es un espacio topológico X junto con una acción $G \times X \to X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo g. Probar que los siguientes espacios topológicos son G-espacios.

   (a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.

   (b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n,m) \cdot (x,y) = (n+x, m+y)$.

   (c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

   (d) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{-1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x,y) = (m+x, (-1)^m y)$.

32. Si X es un G-espacio, podemos definir en X la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff \exists\, g \in X \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

El espacio de cociente resultante lo notamos con X/G, y consideramos en él la topología cociente. Probar que la proyección al cociente $p : X \to X/G$ es abierta, y que si G es finito, entonces p también es cerrada.

33. (a) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ejercicio 31, a) es homeomorfo a S^1.

   (b) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ejercicio 31, b) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.

   (c) El espacio cociente $S^n/\mathbb{Z}_2$ (ejercicio 31, c) se nota $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n.

   (d) Probar que el espacio cociente $X/\mathbb{Z}$ (ejercicio 31, d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0,1] \times [0,1]$ por la relación que identifica $(0,y)$ con $(1, 1-y)$, $y \in [0,1]$.)