Práctica 5: Vectores aleatorios

"Conviene que todos los ciudadanos entren en contacto con la verdadera matemática, que es método, arte y ciencia, muy distinta de la calculatoria, que es técnica y rutina."
Luis Antonio Santaló

Ejercicio 1. Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases}$$
$$Y = \text{Número de bolillas negras extraídas.}$$

a) Hallar p_{XY} y F_{XY}.

b) Hallar p_X y p_Y. Determinar si X e Y son independientes.

Ejercicio 2. Se sabe que en la provincia de Salta la proporción de hombres de ojos azules es 20%, de ojos verdes es 5%, de ojos negros es 10% y otro color de ojos es 65%. Josefina decide viajar de la capital salteña a una ciudad a 200 km. donde se realizará un congreso médico sobre alcoholismo. Para ello debe tomar dos colectivos en los que viajan sólo salteños. Para llevar a cabo una prueba decide tomar una copa de jerez con cada hombre de ojos verdes o azules que encuentre en su viaje. Como su belleza es irresistible, todos los hombres aceptan su invitación. En el primer colectivo viajan 10 hombres de los cuales ninguno transborda al siguiente. En el segundo hay 8 hombres.

a) Calcular la probabilidad de que en la primera parte del trayecto haya tomado menos de 4 copas.

b) Calcular la probabilidad de que tome más de 3 copas en total.

Ejercicio 3. El 10% de la población fuma cigarrillos negros, el 35% fuma cigarrillos rubios, el 3% fuma pipa y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas y con los resultados obtenidos se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{número de personas que no fuman} \\ Y_2 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos rubios} \\ Y_3 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos negros} \\ Y_4 &= \text{número de personas que fuman pipa.} \end{aligned}$$

a) Hallar la probabilidad puntual del vector aleatorio (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4).

b) Hallar la probabilidad puntual del vector aleatorio $(Y_1, Y_2 + Y_3, Y_4)$.

c) Hallar la probabilidad puntual de la variable aleatoria $Y_2 + Y_3$. ¿Se obtiene información adicional a la contenida en la distribución de $Y_2 + Y_3$ si se calcula además la distribución del vector aleatorio $(Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_4)$?¿Por qué?

Ejercicio 4. Sea (X,Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(3y+x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar k, f_X, f_Y, F_X, F_Y, $P\left(X < \frac{Y}{3}\right)$ y $P(X^2 - Y^2 = 3)$.

Ejercicio 5. Tres integrantes de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas. El atleta A salta con distribución uniforme en el intervalo $[0,2]$ mientras que el atleta B lo hace con una distribución absolutamente continua con función de densidad

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$$

y el atleta C lo hace con otra distribución absolutamente continua cuya densidad es

$$f(x) = \frac{x}{2} \mathbb{1}_{[0,2]}(x).$$

a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.

b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 1.2.

Ejercicio 6. Dadas $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F, se definen sus estadísticos de orden $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ como aquellas variables aleatorias que se obtienen ordenando las X_i de manera creciente. En particular, tenemos que

$$X^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$X^{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Hallar para cada $k = 1, \ldots, n$ la función de distribución acumulada de $X^{(k)}$ en términos de F.

Ejercicio 7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivamente.

a) Mostrar que la distribución de $X^{(1)}$ es exponencial. ¿De qué parámetro?

b) Probar que

$$P\left(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

Ejercicio 8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que

$$P(X_k \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t^k & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n$$

a) Sea $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Hallar F_Y, f_Y y $\mathbb{E}(Y)$.

b) Hallar $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i)$.

Ejercicio 9. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(3y+x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Var}(X - Y)$ y $\rho(X, Y)$.

Ejercicio 10. En el ejercicio 7 de la práctica 4, determinar la distribución conjunta del vector (X_i, X_j), calcular $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ para $i \neq j$ y verificar

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(N-n)nD(N-D)}{(N-1)N^2}.$$

Ejercicio 11.

a) Probar que si X e Y son independientes entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

b) Probar que la vuelta del item anterior no vale. Es decir, mostrar con un ejemplo que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ no implica que X e Y sean independientes.

   Sugerencia: Puede considerar un vector aleatorio con densidad uniforme en el pentágono de vértices $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$.