Práctica 6: Vectores aleatorios

"Conviene que todos los ciudadanos entren en contacto con la verdadera matemática, que es método, arte y ciencia, muy distinta de la calculatoria, que es técnica y rutina."
Luis Antonio Santaló

Ejercicio 1. Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases}$$
$$Y = \text{Número de bolillas negras extraídas.}$$

a) Hallar p_{XY} y F_{XY}.

b) Hallar p_X y p_Y. Determinar si X e Y son independientes.

Ejercicio 2. El 10% de la población fuma cigarrillos negros, el 35% fuma cigarrillos rubios, el 3% fuma pipa y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas y con los resultados obtenidos se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{número de personas que no fuman} \\ Y_2 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos rubios} \\ Y_3 &= \text{número de personas que fuman cigarrillos negros} \\ Y_4 &= \text{número de personas que fuman pipa.} \end{aligned}$$

a) Hallar la probabilidad puntual del vector aleatorio (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4).

b) Hallar la probabilidad puntual del vector aleatorio $(Y_1, Y_2 + Y_3, Y_4)$.

c) Hallar la probabilidad puntual de la variable aleatoria $Y_2 + Y_3$. ¿Se obtiene información adicional a la contenida en la distribución de $Y_2 + Y_3$ si se calcula además la distribución del vector aleatorio $(Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_4)$?¿Por qué?

Ejercicio 3. Sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(3y + x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar k, f_X, f_Y, F_X, F_Y, $P\left(X < \frac{Y}{3}\right)$ y $P(X^2 - Y^2 = 3)$.

Ejercicio 4. Tres integrantes de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas. El atleta A salta con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2]$, mientras que el atleta B lo hace con una distribución absolutamente continua con función de densidad $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ y el atleta C lo hace con otra distribución absolutamente continua cuya densidad es $f(x) = \frac{x}{2} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$.

a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.

b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 1.2.

Ejercicio 5. Dadas $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F, se definen sus estadísticos de orden $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ como aquellas variables aleatorias que se obtienen ordenando las X_i de manera creciente. En particular, tenemos que

$$X^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$
$$X^{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Hallar para cada $k = 1, \dots, n$ la función de distribución acumulada de $X^{(k)}$ en términos de F.

Ejercicio 6. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivamente.

a) Mostrar que la distribución de $X^{(1)}$ es exponencial. ¿De qué parámetro?

b) Probar que

$$P\left(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

Ejercicio 7. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que

$$P(X_k \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t^k & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \qquad k = 1, \dots, n$$

a) Sea $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$. Hallar F_Y, f_Y y $\mathbb{E}(Y)$.

b) Hallar $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i)$.

Ejercicio 8. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(3y + x) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Var}(X - Y)$ y $\rho(X, Y)$.

Ejercicio 9. En el ejercicio 7 de la práctica 4, determinar la distribución conjunta del vector (X_i, X_j), calcular $\text{Cov}(X_i, X_j)$ para $i \neq j$ y verificar

$$\text{Var}(X) = \frac{(N - n)nD(N - D)}{(N - 1)N^2}.$$

Ejercicio 10.

a) Probar que si X e Y son independientes entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

b) Probar que la vuelta del item anterior no vale. Es decir, mostrar con un ejemplo que $\text{Cov}(X, Y) = 0$ no implica que X e Y sean independientes.

Sugerencia: Puede considerar un vector aleatorio con densidad uniforme en el pentágono de vértices $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$.

Ejercicio 11. Sean $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$ e $Y \sim \mathcal{B}i(m,p)$ variables aleatorias independientes. Probar que $X+Y \sim \mathcal{B}i(n+m,p)$.

Ejercicio 12. Sean $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ y $\lambda > 0$. Sea $W = -\frac{\ln(1-X)}{\lambda}$. Hallar la distribución de W.

Ejercicio 13. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[-1,1]$. Sea $U = \frac{X_1+X_2}{2}$. Verificar que

$$f_U(u) = (u+1)\, \mathbb{1}_{(-1,0)}(u) + (1-u)\, \mathbb{1}_{(0,1)}(u).$$