Probabilidades y Estadística (C) – 2019

Intervalos de Confianza – Parte 2 (5/11)

Intervalos de confianza: All of Statistics, Wasserman

- Interval that contains an unknown quantity with a given frequency-
All of Statistics, Wasserman

-Intervalo que contiene una cantidad desconocida (parámetro de interés) con cierta frecuencia (nivel) -

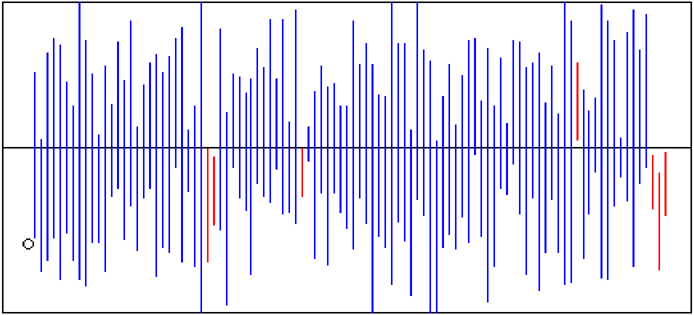
Intervalos de confianza: definición

- Diremos que $(a(X_1,\ldots,X_n), b(X_1,\ldots,X_n))$ es un intervalo de confinanza de nivel $1-\alpha$ para el parámetro θ sii

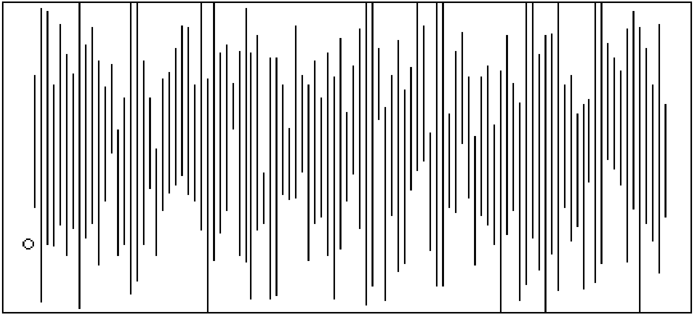
$$P\left(a(X_1,\ldots,X_n)\ <\ \theta\ <\ b(X_1,\ldots,X_n)\right) = 1-\alpha\ .$$

$$P_F\left(a(X_1,\ldots,X_n)\ <\ \theta(F)\ <\ b(X_1,\ldots,X_n)\right) = 1-\alpha\ , \forall F \in \mathcal{M}.$$

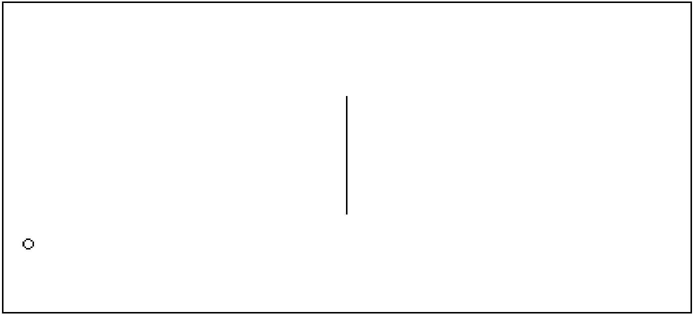
Muchos intervalos y la verdad



Muchos intervalos



Mi intervalo y yo, buena suerte! (confianza)



Construcción de intervalos de confianza - PIVOT

- Buscamos $(a(X_1, \ldots, X_n), b(X_1, \ldots, X_n))$ de forma tal que

$$P\left(a(X_1, \ldots, X_n) \; < \; \theta \; < \; b(X_1, \ldots, X_n)\right) = 1 - \alpha \; .$$

- Construcción mediante la utilización de un **Pivot**:

$$H(X_1, \ldots, X_n, \theta) \sim \text{Distribución } \textit{tabulada}$$

- Encerramos al pivot entre los percentiles de su distribución y despejamos θ.

Mundo normal - σ_0^2 conocido

- Buscamos intervalo de confianza para μ
- Pivot: Cuenta con la muestra y el parámetro de interés, cuya distribución es conocida.

$$\text{PIVOT:} \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}}$$

- Distribución del pivot

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}} \sim Z \, , Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Sea z_β con $P(Z > z_\beta) = \beta$:

$$z_\beta = \phi^{-1}(1-\beta)$$

- tenemos que

$$P\left(-z_{\alpha/2} \; < \; \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma_0^2/n}} \; < \; z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Mundo normal - σ_0^2 conocido

- Equivalentemente, tenemos que

$$P\left(\overline{X}_n - \frac{\sigma_0 z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \ < \ \mu \ < \ \overline{X}_n + \frac{\sigma_0 z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

y por consiguiente,

$$\left(\overline{X}_n - \frac{\sigma_0 z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{X}_n + \frac{\sigma_0 z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

es un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para μ bajo el modelo normal, con varianza σ_0^2 conocida.

Distribución chi cuadrado: definición

- Sean $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d., $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tenemos entonces que

$$Z_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{(revisa cambio de variable)}$$

$$\text{y por consiguiente} \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

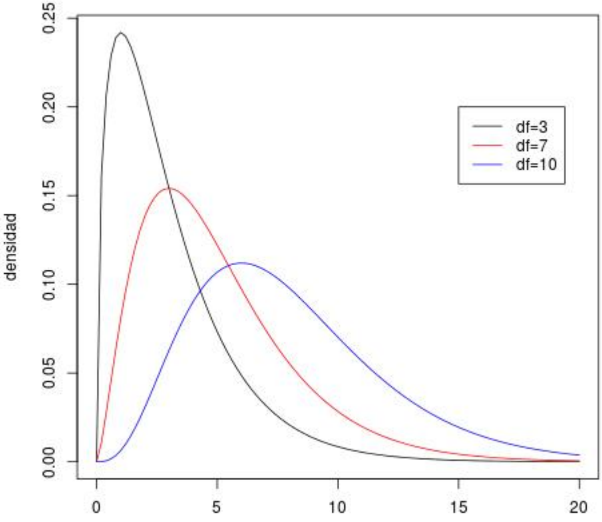
Definición: Llamamos chi cuadrado con n- grados de libertad a la distribución $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

- Notación: χ_n^2: chi cuadrado con n grados de libertad.
- Es decir, utilizamos indistintamente las siguiente notaciones:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi_n^2 \,, \quad Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- Notar que $\Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi_{2n}^2$

Densidad chi cuadrado



Caso particular:

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

- mientras que al reemplazar μ por $\overline{X}_n$ tenemos que (sin demostrar)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \,, \quad \text{es decir } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$\text{recordemos que} \quad S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

Intervalos de confianza para σ^2 con μ desconocido

- Pivot: cuenta con la muestra y el parámetro de interés, cuya distribución es conocida.
- El pivot y su distribución

$$\text{el pivot} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{su distribución}$$

- Sea $\chi^2_{n-1,\beta}$ con $P(X > \chi^2_{n-1,\beta}) = \beta$ cuando $X \sim \chi^2_{n-1}$, entonces

$$P\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

y por consiguiente,

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \quad , \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right)$$

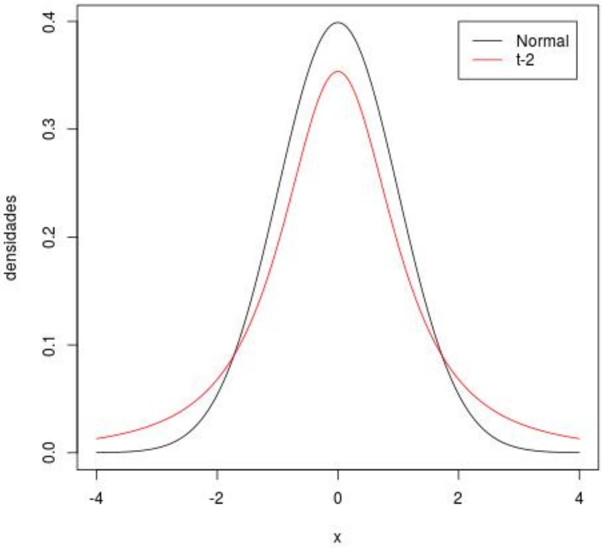
es un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para σ^2 bajo el modelo normal, con μ DESconocida.

Distribución t de student: definición

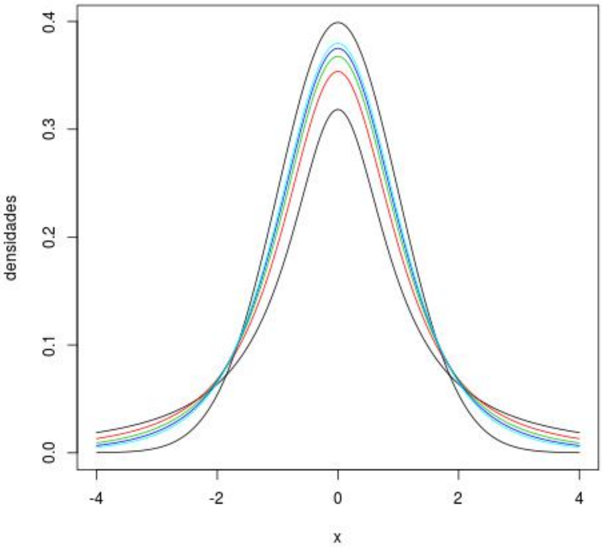
- Z, V v.a. independientes,
- $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $V \sim \chi_n$.
- Llamamos t de student con n grados de libertad a la distribución de
$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}.$$

En adelante, utilizamos T_n (t_n) para denotar la t de student con n grados de libertad.

Normal vs. t2



Normal y student



Caso particular:

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. Entonces

$$Z := \frac{\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad V := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- y además son independientes sin demostrar. Luego,

$$\frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sqrt{S^2/n}} \sim T_{n-1}$$

Mundo normal - σ^2 desconocido

- Buscamos intervalo de confianza para μ con σ^2 desconocido.
- Pivot:

$$\frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{S^2/n}} \sim T_{n-1}$$

- Sea $t_{n-1,\beta}$ con $P(X > t_{n-1,\beta}) = \beta$ cuando $X \sim T_{n-1}$, entonces

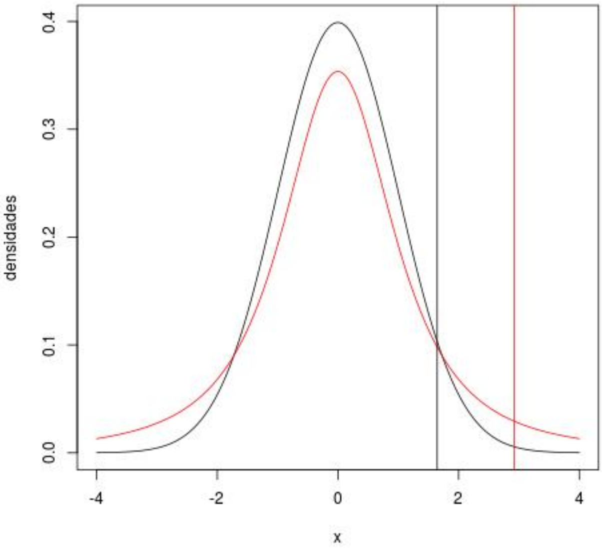
$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \;<\; \frac{(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{S^2/n}} \;<\; t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

y por consiguiente,

$$\left(\overline{X}_n - \frac{\sqrt{S^2}\; t_{n-1,\alpha/2}}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{X}_n + \frac{\sqrt{S^2}\; t_{n-1,\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

es un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para μ bajo el modelo normal, con varianza σ^2 DESconocida.

Normal vs. t2: mirando percentiles...



Resumen bajo normalidad: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Parámetro	Supuesto	Pivot
$\mu = E(X)$	Normales σ^2 conocido	$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\mu = E(X)$	Normales σ^2 DESconocido	$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S} \sim T_{n-1}$
$\sigma^2 = V(X)$	Normales μ conocido	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$
$\sigma^2 = V(X)$	Normales μ DESconocido	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

Mundo Exponencial

- $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- $2\lambda X_i \sim \mathcal{E}(1/2) = \Gamma(1, 1/2)$?
- Armamos el Pivot

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

Mundo Exponencial

- $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- $2\lambda X_i \sim \mathcal{E}(1/2) = \Gamma(1, 1/2)$?
- Armamos el Pivot

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

Construya un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para la esperanza de X.

Mundo Exponencial

- $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- $2\lambda X_i \sim \mathcal{E}(1/2) = \Gamma(1, 1/2)$?
- Armamos el Pivot

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

Construya un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para la esperanza de X.

Si g es una funcion monótona, podemos construir intervalos de confianza para $g(\theta)$ utilizando el intervalo para θ.