Probabilidades y Estadística (C) – 2019

Test de Hipótesis – Parte 1 (14/11)

Intervalos para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dos muestras aleatorias independientes entre sí. Se quiere construir un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$.

Caso 1: varianzas conocidas

Pivot:

$$\frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Intervalos para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes

$X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ independientes. Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$.

Caso 2: varianzas desconocidas pero IGUALES: $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim Z, \quad \frac{S_1^2\left(n_1 - 1\right)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_1 - 1}, \quad \frac{S_2^2\left(n_2 - 1\right)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2 - 1}$$

Pivot

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2},$$

donde

$$S_p^2 = \frac{S_1^2\left(n_1 - 1\right) + S_2^2\left(n_2 - 1\right)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Test de hipótesis

- X_i i.i.d. θ parámetro de interés.
- Hay dos posibles hipótesis sobre el valor del parámetro: H_0 vs. H_1
- H_0: Hipótesis nula. H_1: Hipótesis alterantiva.

Test – Hipótesis nula y alternativa

- Hipótesis alternativa H_1: Escenario para el cual buscamos evidencia significativa.

- Hipótesis alternativa H_1: Es la hipótesis *del investigador*

- La hipótesis alternativa (H_1) se establece mediante la observación de evidencia (en los datos) que contradice la hipótesis nula y apoya la hipótesis alternativa.

Test – Hipótesis nula y alternativa

- Hipótesis alternativa H_1: Escenario para el cual buscamos evidencia significativa.

- Hipótesis alternativa H_1: Es la hipótesis *del investigador*

- La hipótesis alternativa (H_1) se establece mediante la observación de evidencia (en los datos) que contradice la hipótesis nula y apoya la hipótesis alternativa.

- Los datos son *raros* bajo la hipótesis nula (H_0) y ADEMAS sugieren que sea rechazada en favor de la hipótesis alternativa .

Test – Regla de Decisión – Región de Rechazo (de H_0)

Vamos a indicar como deben ser los datos para DECIDIR rechazar la hipótesis nula en favor de la alternativa.

$\mathcal{R}$:= Región de rechazo de H_0

$\mathcal{R}$=: conjunto de resultados para los cuales H_0 es rechazada en favor de H_1

Test - Ingredientes

- H_0: Hipótesis nula. $H_0 : \theta \in \Theta_0$
- H_1: Hipótsis Alternativa. $H_1 : \theta \in \Theta_1$
- $\mathcal{R}$: Región que indica como deben ser las observaciones para rechazar H_0 en favor de H_1.

Test - Ingredientes

- H_0: Hipótesis nula. $H_0 : \theta \in \Theta_0$
- H_1: Hipótsis Alternativa. $H_1 : \theta \in \Theta_1$
- $\mathcal{R}$: Región que indica como deben ser las observaciones para rechazar H_0 en favor de H_1.

Cuando una hipótesis tiene un solo posible valor, decimos que es una hipótesis simple. Caso contrario, decimos que es compuesta:

Ejemplo - $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$

- Hipótesis nula: $H_0 : \mu = 37$ (simple)
- Hipótesis alternativa: $H_1 : \mu = 40$ (simple)
- Región de Rechazo:
  - Regla 1: región que propusieron y estudiamos en clase:

$$\mathcal{R} = \{\overline{X}_n \geq 38.5\}$$

Ejemplo - $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$

- Hipótesis nula: $H_0 : \mu = 37$ (simple)
- Hipótesis alternativa: $H_1 : \mu = 40$ (simple)
- Región de Rechazo:
  - Regla 1: región que propusieron y estudiamos en clase:

$$\mathcal{R} = \{\overline{X}_n \geq 38.5\}$$

  - Otra regla: otra región que estudiamos (a posteriori) en clase.

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \;\geq\; 1.65 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right\}$$

Región de Rechazo – Típicamente

- H_0, H_1,

$$\mathcal{R} = \{T(X_1, \ldots, X_n) > c)\}$$

- Estadístico del Test: $T(X_1, \ldots, X_n)$
- Punto de corte: c.

Región de Rechazo – Típicamente

- H_0, H_1,

$$\mathcal{R} = \{T(X_1, \ldots, X_n) > c)\}$$

- Estadístico del Test: $T(X_1, \ldots, X_n)$
- Punto de corte: c.
- A veces

$$\mathcal{R} = \{T(X_1, \ldots, X_n) < c_1) \text{ ó } T(X_1, \ldots, X_n) > c_2)\}$$

Estadístico del test en el ejemplo

$$T := \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{\frac{25}{n}}}$$

$$\mathcal{R} = \{T > 1.65\} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{\frac{25}{n}}} \ > \ 1.65 \right\}$$

Test: Regla de decisión- posibles errores

$\mathcal{R}$: Región de rechazo. Determine como deben se los datos para rechazar H_0 en favor de H_1.

	No Rechazamos H_0	Rechazamos H_0
H_0 es cierta	no hay error	**error Tipo I**
H_0 es falsa	**error Tipo II**	no hay error

- Error (es) tipo I: rechazar H_0 cuando es verdadera:
- Error (es) tipo II: NO rechazar H_0 cuando es falsa.

Test: Regla de decisión- posibles errores

$\mathcal{R}$: Región de rechazo. Determine como deben se los datos para rechazar H_0 en favor de H_1.

	No Rechazamos H_0	Rechazamos H_0
H_0 es cierta	no hay error	**error Tipo I**
H_0 es falsa	**error Tipo II**	no hay error

- Error (es) tipo I: rechazar H_0 cuando es verdadera:
- Error (es) tipo II: NO rechazar H_0 cuando es falsa.

Test: Regla de decisión- posibles errores

$\mathcal{R}$: Región de rechazo. Determine como deben se los datos para rechazar H_0 en favor de H_1.

	No Rechazamos H_0	Rechazamos H_0
H_0 es cierta	no hay error	**error Tipo I**
H_0 es falsa	**error Tipo II**	no hay error

- Error (es) tipo I: rechazar H_0 cuando es verdadera.

  Probabilidad (ERROR TIPO I) $= P_\theta(\mathcal{R}), \quad$ con θ satisfaciendo H_0

- Error (es) tipo II: NO rechazar H_0 cuando es falsa.

  $$\text{Probabilidad (ERROR TIPO II)} = P_\theta(\mathcal{R}^c) = 1 - P_\theta(\mathcal{R}),$$

  con θ satisfaciendo H_1

Volvamos al Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ – Criterio I

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu = 40$. Región de Rechazo: Regla 1

$$\mathcal{R} = \{\overline{X}_n \geq 38.5\}$$

- Probabilidad de Error Tipo I:

$$\begin{aligned} P_{\mu=37}(\mathcal{R}) &= P_{\mu=37}(\overline{X}_n \geq 38.5) \\ &= P_{\mu=37}\left(\frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \geq \frac{38.5 - 37}{\sqrt{25/n}}\right) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{38.5 - 37}{\sqrt{25/n}}\right) \end{aligned}$$

Volvamos al Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ – Criterio I

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu = 40$. Región de Rechazo: Regla 1

$$\mathcal{R} = \{\overline{X}_n \geq 38.5\}$$

  - Probabilidad de Error Tipo I:

$$\begin{aligned}
P_{\mu=37}(\mathcal{R}) &= P_{\mu=37}(\overline{X}_n \geq 38.5) \\
&= P_{\mu=37}\left(\frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \geq \frac{38.5 - 37}{\sqrt{25/n}}\right) \\
&= 1 - \phi\left(\frac{38.5 - 37}{\sqrt{25/n}}\right)
\end{aligned}$$

  - Probabilidad de Error Tipo II:

$$\begin{aligned}
P_{\mu=40}(\mathcal{R}^c) &= 1 - P_{\mu=40}(\mathcal{R}) = 1 - P_{\mu=40}(\overline{X}_n \geq 38.5) \\
&= 1 - P_{\mu=40}\left(\frac{\overline{X}_n - 40}{\sqrt{25/n}} \geq \frac{38.5 - 40}{\sqrt{25/n}}\right) \\
&= 1 - \left(1 - \phi\left(\sqrt{n}(38.5 - 40)/\sqrt{25}\right)\right)
\end{aligned}$$

Volvamos al Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ – Criterio II

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu = 40$. Región de Rechazo: Regla 2

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ 1.65 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right\}$$

  - Probabilidad de Error Tipo I:

$$P_{\mu=37}(\mathcal{R}) \quad = \quad P_{\mu=37}\left(\frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ 1.65 \right) = 1 - \phi(1.65) = 0.05$$

  - Probabilidad de Error Tipo II:

$$\begin{aligned}
P_{\mu=40}(\mathcal{R}^c) &= 1 - P_{\mu=40}(\mathcal{R}) \\
&= 1 - P_{\mu=40}\left(\overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right) \\
&= 1 - P_{\mu=40}\left(\frac{\overline{X}_n - 40}{\sqrt{25/n}} \geq \frac{\sqrt{n}(37-40)}{\sqrt{25}} + 1.65 \right) \\
&= \phi\left(\frac{\sqrt{n}(37-40)}{\sqrt{25}} + 1.65 \right) \longrightarrow 0 (n \to \infty)
\end{aligned}$$

$\pi(\theta)$: Función de Potencia (del Test)

$\pi(\theta)$ es la probabilidad de rechazar H_0 cuando el valor verdadero del parámetro es θ.

$$\pi(\theta) = P_\theta(\mathcal{R})$$

- si θ satisface H_0, $P_\theta(\mathcal{R}) = \pi(\theta)$ es la probabilidad de un error tipo I.
- si θ satisface H_1, $P_\theta(\mathcal{R}^c) = 1 - \pi(\theta)$ es la probabilidad de un error tipo II.

Volvamos al Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ – Criterio II – Potencia

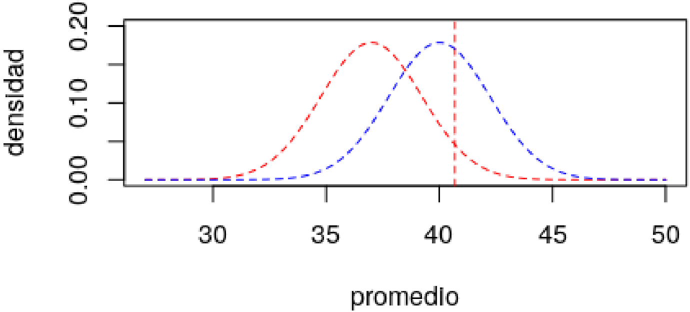
- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu = 40$. Región de Rechazo: Regla 2

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ 1.65 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right\}$$

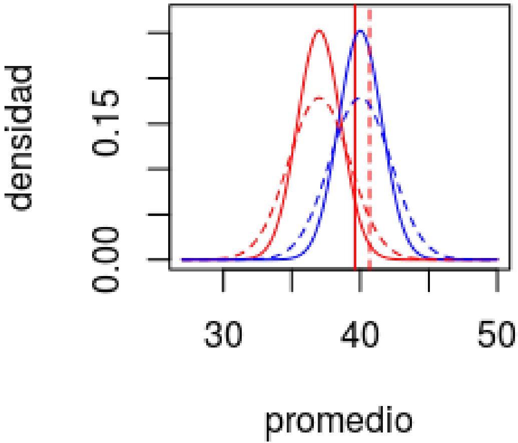
- Función de Potencia:

$$\begin{aligned}
\pi(\mu) &= P_\mu(\mathcal{R}) = P_\mu\left(\overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right) \\
&= P_\mu(\mathcal{R}) = P_\mu\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{25/n}} \geq \frac{37 - \mu}{\sqrt{25/n}} + 1.65 \right) \\
&= 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(37 - \mu)}{\sqrt{25}} + 1.65 \right)
\end{aligned}$$

Densidad de $\overline{X}_n$, $n = 5$, $\mu = 37$ y $\mu = 40$



Densidad de $\overline{X}_n$, $n = 5$, $\mu = 37$ y $\mu = 40$



Volvamos al Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ – Criterio II – Potencia

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu = 40$. Región de Rechazo: Regla 2

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ 1.65 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right\}$$

- Función de Potencia:

$$\pi(\mu) \quad = \quad 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(37 - \mu)}{\sqrt{25}} + 1.65 \right)$$

- Interesantemente,
  - π es creciente: $\pi(\nu_1) \leq \pi(\nu_2)$ si $\nu_1 < \nu_2$
  - $\pi(\mu) \leq 0.05$ para todo $\mu \leq 37$
  - $\lim_{n\to\infty} \pi(\mu) = 1$ para todo $\mu_1 > 37$

Nivel de significatividad del Test

Dados H_0, H_1 y $\mathcal{R}$, decimos que el test es de nivel α si

$$P_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha \quad \forall\, \theta \text{ satisfaciendo } H_0$$

Nivel de significatividad del Test

Dados H_0, H_1 y $\mathcal{R}$, decimos que el test es de nivel α si

$$P_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha \quad \forall\, \theta \text{ satisfaciendo } H_0$$

$$P_\theta(\mathcal{R}) = \pi(\theta) \leq \alpha\ , \quad \forall\, \theta \in \Theta_0$$

Nivel de significatividad del Test

Dados H_0, H_1 y $\mathcal{R}$, decimos que el test es de nivel α si

$$P_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha \quad \forall\, \theta \text{ satisfaciendo } H_0$$

$$P_\theta(\mathcal{R}) = \pi(\theta) \leq \alpha\,, \quad \forall\, \theta \in \Theta_0$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta) \leq \alpha$$

Volvamos al Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ – Criterio II – Potencia

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu = 40$. Región de Rechazo: Regla 2

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ 1.65 \right\} = \left\{ \overline{X}_n \geq 37 + 1.65\sqrt{25/n} \right\}$$

- Función de Potencia:

$$\pi(\mu) \ = \ 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{n}(37-\mu)}{\sqrt{25}} + 1.65 \right)$$

$$\pi(\mu) \leq 0.05 \ , \quad \forall \mu \leq 37$$
$$\lim_{n\to\infty} \pi(\mu) = 1 \ , \quad \forall \mu_1 > 37$$

- Observación $\mathcal{R}$ es una región de rechazo de nivel 0.05 para $H_0 : \mu \leq 37$ (compuesta) vs. $H_1 : \mu > 37$ (compuesta).

En sintesis, cuando $H_0 : \theta = \theta_0$

- Fijado n, y α, se puede construir un test mediante una región de rechazo $\mathcal{R}_\alpha$ de nivel α:

$$P_{\theta_0}(\mathcal{R}_\alpha) = \alpha$$

- Para armar la región de rechazo se usa un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ cuya distribución es CONOCIDA bajo H_0.
- La potencia del test está definida por

$$\pi(\theta) = P_\theta(\mathcal{R}_\alpha)$$

- Dado un valor θ_1 en H_1 y β, se puede encontrar n para que el error tipo II en θ_1 sea menor o igual a β.

$$\beta \geq P_{\theta_1}(\mathcal{R}^c) = 1 - \pi(\theta_1)$$

Una muestra normal, varianza conocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma_0^2\right)$ i.i.d., con σ_0^2 conocida.
Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del test

$$T := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \quad \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Región de rechazo de nivel α

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} > z_\alpha \right\}$$

2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} < -z_\alpha \right\}$$

3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \left| \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \right| > z_{\alpha/2} \right\}$$

p-valor – en el Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu > 37$.
- Región de Rechazo de nivel α

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ z_\alpha \right\}$$

- Datos=

$$44.61\ , \ \ 37.43\ , \ \ 44.11\ , \ \ 44.59\ , \ \ 31.00$$

- ¿Para qué niveles de α rechazamos H_0?

p-valor – en el Ejemplo – $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$

- $H_0 : \mu = 37$ vs. $H_1 : \mu > 37$.
- Región de Rechazo de nivel α

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\overline{X}_n - 37}{\sqrt{25/n}} \ \geq \ z_\alpha \right\}$$

- Datos=

$$44.61 \ , \ \ 37.43 \ , \ \ 44.11 \ , \ \ 44.59 \ , \ \ 31.00$$

- ¿Para qué niveles de α rechazamos H_0?
- p-valor: menor nivel para el cual rechaza H_0.

$$\text{p-valor} = \ldots$$

p-valor

p-valor

- p-valor se calcula una vez realizado el experimento.
- Depende de los valores $(x_1, \ldots, x_n)$ observados.
- Indica *cuan probable es observar valores extremos como el obtenido con* $(x_1, \ldots, x_n)$ *cuando* H_0 *es verdadero.*

  p-valor chico da evidencia contra H_0*, en favor de* H_1

- Con los datos rechazo H_0 a nivel α si y solo si p-valor $\leq \alpha$.

p-valor

- Tenemos H_0, H_1 y, para cada α, región $\mathcal{R}_\alpha$ de nivel α.
- Tenemos datos $(x_1, \ldots, x_n)$ observados.
- Nos preguntamos si con los datos rechazamos a nivel α:

$$(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{están en la región de rechazo } \mathcal{R}_\alpha?$$

- Buscamos el α más chico para el cual Rechazamos H_0 con los datos $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\text{p-valor} = \min\{\alpha : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}_\alpha\}$$

- Con los datos rechazo H_0 a nivel α si y solo si p-valor $\leq \alpha$.

Resumen de distribuciones

Una muestra normal, varianza conocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma_0^2\right)$ i.i.d., con σ_0^2 conocida.
Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del test

$$T := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \quad \underset{\text{bajo } H_0}{\underset{\uparrow}{\sim}} \quad \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Una muestra normal, varianza desconocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i.i.d. Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0 \qquad \mu \neq \mu_0$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \quad t_{n-1}$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \tag{1}$$

Test para la varianza de una población normal

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i.i.d. Se quiere testear

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \text{ versus alguna de las alternativas siguientes}$$

$$H_1 : H_1 : \sigma > \sigma_0 \qquad \sigma < \sigma_0 \qquad H_1 : \sigma \neq \sigma_0$$

y la media poblacional μ es desconocida. Estadístico del test

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \quad \chi^2_{n-1}$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{2}$$

Test asintótico - Nivel Asintótico:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(\mathcal{R}) \leq \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_0} \pi_n(\theta) \leq \alpha$$

Cuando $H_0 : \theta = \theta_0$,

$$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}(\mathcal{R}) \leq \alpha$$

Se utiliza un estadístico cuya distribución bajo H_0 as asintóticamente conocida.

Test asintótico para la media de una población

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim F$ i.i.d. Sea $\mu = E\left(X_1\right)$. Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Estadístico del test asintótico (para n grande)

$$\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} \quad N\left(0, 1\right)$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{3}$$

Test asintótico para una proporción poblacional

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim Bi\,(1, p)$ Se quiere testear

$H_0 : p = p_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad H_1 : p < p_0$$

Estadístico del test asintótico (para n grande)

$$\frac{\widehat{p}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} N\,(0, 1)$$

donde $\widehat{p}_n = \overline{X}_n$ es la proporción de éxitos en la muestra.

Test asintótico para una proporción poblacional – Otra posibilidad

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim Bi\,(1, p)$ Se quiere testear

$H_0 : p = p_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad H_1 : p < p_0$$

Estadístico del test asintótico (para n grande)

$$\frac{\widehat{p}_n - p_0}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)}{n}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} \quad N\,(0, 1)$$

donde $\widehat{p}_n = \overline{X}_n$ es la proporción de éxitos en la muestra.

Test asintótico (o aproximado) para comparar las medias de dos poblaciones

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1}$ v.a.i.i.d. y sean $\mu_1 = E(X_1)$ y $\sigma_1^2 = Var(X_1)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ v.a.i.i.d. independientes de las anteriores y sean $\mu_2 = E(Y_1)$ y $\sigma_2^2 = Var(Y_1)$, donde n_1 y n_2 son números suficientemente grandes. Se quiere testear

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} N(0,1)$$

Test asintótico (o aproximado) para comparar dos proporciones poblacionales

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim Bi(1, p_1)$ v.a.i.i.d. e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim Bi(1, p_2)$ v.a.i.i.d. independiente de las anteriores Se quiere testear

$H_0 : p_1 - p_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : p_1 - p_2 \neq \delta \qquad H_1 : p_1 - p_2 > \delta \qquad H_1 : p_1 - p_2 < \delta$$

Estadístico del testcon asintótico, con n_1 y n_2 grandes

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n_2}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} N(0,1)$$

donde $\widehat{p}_1 = \overline{X}$ y $\widehat{p}_2 = \overline{Y}$ son, respectivamente, las proporciones de éxitos en la primer y segunda muestra.

Test para comparar medias de dos muestras apareadas

Sean $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de los resultados de dos mediciones realizadas sobre la misma unidad experimental Supongamos que las diferencias $D_i = X_i - Y_i \sim N\left(\mu_D, \sigma_D^2\right)$ independientes entre sí. Se quiere testear

$$H_0 : \mu_D = \delta \text{ versus alguna de las alternativas siguientes}$$

$$H_1 : \mu_D \neq \delta \qquad H_1 : \mu_D > \delta \qquad H_1 : \mu_D < \delta$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{D} - \delta}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} t_{n-1}$$

donde S_D es el desvío estándar de las D_i, es decir

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2.$$