Matemática I (B) — 2$^{\text{do}}$ cuatrimestre de 2019

Práctica 8 — Sistemas de ecuaciones diferenciales

Sistemas de ecuaciones lineales

1. *a*) Halle la solución general de los siguientes sistemas.

I. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

II. $\begin{cases} x' = -8x - 5y \\ y' = 10x + 7y \end{cases}$

III. $\begin{cases} x' = -4x + 3y \\ y' = -2x + y \end{cases}$

IV. $\begin{cases} x' = -x + 3y - 3z \\ y' = -2x + y \\ z' = -2x + 3y - 2z \end{cases}$

b) Halle la solución de II que satisface $(x(0), y(0)) = (1, 3)$.

c) Halle la solución de IV que satisface $(x(0), y(0), z(0)) = (2, 3, 3)$.

d) Para cada sistema del ítem *a*, halle el conjunto de datos iniciales para los cuales la solución correspondiente tiende a $\vec{0}$ cuando t tiende a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

2. *a*) Halle la solución general de los siguientes sistemas.

I. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

II. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$

III. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}$

b) Halle la solución de I que satisface $(x(0), y(0)) = (2, 3)$.

c) Para cada sistema del ítem *a*, halle el conjunto de datos iniciales para los cuales la solución correspondiente tiende a $\vec{0}$ cuando t tiende a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

3. Halle la solución general de los siguientes sistemas no homogéneos.

a) $\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = 2x + 3y + t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = 2x - y + e^{2t} \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$

Sugerencia: Aproveche los cálculos realizados en los ejercicios anteriores.

4. Realice un bosquejo del diagrama de fases de las soluciones de los sistemas de los Ejercicios 1*a* (excepto el ítem IV) y 2*a*.

5. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 20 litros de una solución salina. Al tanque A entra una salmuera que contiene $0,05$kg de sal por litro de agua a razón de 5 litros por minuto. Del tanque B se extrae, a través de un filtro, agua pura a razón de 5 litros por minuto, de manera que la sal no sale del tanque. Además el líquido se bombea del tanque A al tanque B a una velocidad de 7 litros por minuto y del tanque B al tanque A a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla se mantenga homogénea.

a) Determine la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$, si la cantidad inicial de sal en cada tanque está dada por

I. $x_A = 10, x_B = 40$

II. $x_A = 10, x_B = 10$

III. x_A, x_B genéricos.

b) Para cada cantidad inicial considerada en el ítem anterior, determine el límite cuando $t \to +\infty$ de la concentración de sal en cada tanque.

6. Un modelo simplificado de la dinámica del receptor de insulina considera los siguientes tres componentes: el receptor libre (x), el receptor unido a la insulina (y) y el receptor unido a la insulina y fosforilado (z). La dinámica entre estos tres componentes se puede representar por medio del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = -k_1 x + k_2 y + k_4 z \\ y' = k_1 x - (k_2 + k_3) y \\ z' = k_3 y - k_4 z \end{cases} \tag{1}$$

donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son constantes positivas.

a) Si $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$ y las concentraciones iniciales de cada receptor son x_0, y_0 y z_0 (todas positivas), determine la concentración que habrá de cada uno de ellos a tiempo $t > 0$.
¿Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones?

Como del sistema de ecuaciones (1) se sigue que $x' + y' + z' = 0$, existe una constante C, que representa la cantidad total del receptor, tal que $x + y + z = C$. Por lo tanto (1) se puede reducir a un sistema bidimensional:

$$\begin{cases} x' = -(k_1 + k_4) x + (k_2 - k_4) y + k_4 C \\ y' = k_1 x - (k_2 + k_3) y \end{cases} \tag{2}$$

b) Utilizando (2), determine la concentración que habrá de cada receptor (incluyendo z) a tiempo $t > 0$, para los valores de k_1, k_2, k_3, k_4 dados en el ítem anterior.

c) Suponga que $x_0 = 2, y_0 = 1$ y $z_0 = 2$. Verifique que las soluciones halladas en los ítems *a* y *b* coinciden.

Ecuaciones lineales de orden 2

7. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x'' - x' - 2x = 0$

b) $x'' - 2x' + 10x = 0$

8. *a*) Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x'' - x' - 2x = e^{-t}$.

b) Determine cuáles de las soluciones halladas verifican:

I. $x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$

II. $x(0) = 1$

III. $x'(0) = 1$

IV. $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

9. Se tiene una masa sujeta a un resorte. Si se considera el rozamiento, la posición $x(t)$ de la masa a tiempo t está regida por la ecuación

$$mx'' = -kx - bx',$$

donde m es la masa, k es la constante del resorte y b es el coeficiente de rozamiento.

a) Halle la solución general de la ecuación para $m = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{10}$.

b) Halle la solución de la ecuación para $m = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$ y $b = 0$ si $x(0) = 0$ y $x'(0) = \sqrt{2}$.

Sistemas de ecuaciones no lineales y aplicaciones

10. Para cada uno de los siguientes sistemas, halle todos los puntos de equilibrio, escriba la matriz diferencial en cada uno de ellos, analice la estabilidad de cada punto y esboce el diagrama de fases alrededor de cada punto de equilibrio.

a) $\begin{cases} x' = x^2 - y - 1 \\ y' = xy \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = xy - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = x(2 - x) - xy \\ y' = xy - y \end{cases}$

Modelos de depredador-presa

11. Cuando hay dos poblaciones que conviven, digamos x e y, sus tasas de crecimiento dependen de ambas poblaciones. El modelo más sencillo que considera una población de depredadores y y sus presas x es el de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' = x(a - \delta x - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

con $a, b, c, d > 0$. El parámetro $\delta \geq 0$ incorpora al modelo un límite para el crecimiento de las presas en ausencia de predador.

Considere los siguientes sistemas correspondientes a poblaciones depredador-presa sin y con límite para la supervivencia de la presa, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = x(4 - 2y) \\ y' = y(-3 + x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x(3 - \frac{3}{10}x - 2y) \\ y' = y(-4 + x) \end{cases}$$

a) Muestre que el primer sistema tiene al $(0, 0)$ como punto de equilibrio inestable y que tiene otro punto de equilibrio con ambas coordenadas positivas (un *equilibrio positivo*). Esboce el diagrama de fases alrededor del $(0, 0)$. ¿Puede decir algo sobre el diagrama de fases alrededor del equilibrio positivo?

b) Halle todos los puntos de equilibrio del segundo sistema y analice su estabilidad.

Modelos de transmisión de enfermedades

12. Se considera una población de tamaño fijo N que, a tiempo t se puede dividir en tres clases: los susceptibles, $S(t)$, que se pueden infectar; los infectados, $I(t)$, que pueden transmitir la enfermedad; y los removidos, $R(t)$, que son aquellos individuos que se recuperan de la infección y que eventualmente vuelven a ser suceptibles. Un modelo que describe esta dinámica es el siguiente (modelo *SIR*):

$$\begin{cases} S' = -a\, S.I + c\, R \\ I' = a\, S.I - b\, I \\ R' = b\, I - c\, R \end{cases}$$

a) Verifique que $S' + I' + R' = 0$ y que por lo tanto $S(t) + I(t) + R(t)$ toma siempre el mismo valor para todo $t \geq 0$. ¿Cuál es dicha constante?

Tal como en el Ejercicio 6, el modelo SIR se puede reducir el sistema a uno bidimensional:

$$\begin{cases} S' = -a\, S.I + c\, (N - S - I) \\ I' = a\, S.I - b\, I \end{cases}$$

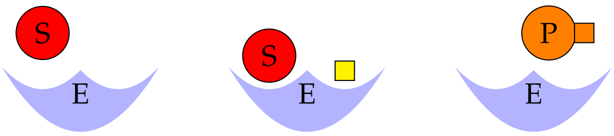
b) Verifique que $(N, 0)$ y $\left(\dfrac{b}{a}, \dfrac{c(N - \frac{b}{a})}{b + c} \right)$ son sus únicos puntos de equilibrio.

Para que el segundo punto de equilibrio tenga sentido biológico, se debe satisfacer que $R_0 = Na/b > 0$. La constante R_0 se denomina el *número reproductivo básico* de la enfermedad, que se utiliza para estimar la velocidad con la cual la enfermedad puede propagarse en la población.

c) Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio y esboce un diagrama de fases si los parámetros son $a = b = c = 1$ y $N = 2$.

Sistemas de reacciones enzimáticas

13. Las enzimas son proteínas que actúan como catalizadores en reacciones bioquímicas, reduciendo la energía de activación que se requiere para iniciar la reacción. Las enzimas no se modifican durante la reacción. Cuando un reactante (llamado sustrato) se une a ellas, se forma un complejo enzima-sustrato que luego permite que el sustrato reaccione y se forme el producto.



$$E + S \underset{k_{off}}{\overset{k_{on}}{\rightleftarrows}} ES \xrightarrow{k_{cat}} E + P$$

Se representa por $s(t), e(t), c(t), p(t)$ a las concentraciones a tiempo t del sustrato, la enzima, el complejo enzima-sustrato y el producto, respectivamente. Bajo cinética de acción de masas se obtiene entonces el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} s' = -k_{on}\, e \cdot s + k_{off}\, c \\ e' = -k_{on}\, e \cdot s + (k_{off} + k_{cat})\, c \\ c' = k_{on}\, e \cdot s - (k_{off} + k_{cat})\, c \\ p' = k_{cat}\, c \end{cases}$$

donde k_{on}, k_{off} y k_{cat} son constantes de reacción positivas.

a) Verifique que $s' + c' + p' = 0$ y $e' + c' = 0$ y que por lo tanto existen constantes S_{tot}, E_{tot} tales que $s(t) + c(t) + p(t) = S_{tot}$ y $e(t) + c(t) = E_{tot}$ para todo tiempo $t \geq 0$. Es decir, $s(t) + c(t) + p(t)$ y $e(t) + c(t)$ son cantidades conservadas.

b) Usando que $e(t) + c(t) = E_{tot}$, mostrar que si $c' = 0$ se puede despejar c en función de s, las constantes de reacción y E_{tot}, y vale

$$p' = \frac{V_{max} s}{K_M + s},$$

donde $V_{max} = k_{cat} E_{tot}$, la velocidad máxima de la enzima, y $K_M = \frac{k_{off} + k_{cat}}{k_{on}}$, la constante de Michaelis-Menten. En 1913, la bioquímica alemana Leonor Michaelis y el físico canadiense Maud Menten propusieron este modelo para las reacciones enzimáticas de donde se deduce esta ecuación para p'.

c) A partir del ítem *a*), mostrar que el sistema se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales en dos variables con un único punto de equilibrio.

14. Un modelo simple de crecimiento microbiano asume que los microbios convierten un sustrato en productos, que luego se convierten en biomasa microbiana, por medio de reacciones enzimáticas. Jacques L. Monod desarrolló en 1950 el siguiente modelo de ecuaciones diferenciales que describe el crecimiento de microbios en un quimiostato:

$$\begin{cases} s' = D(s_0 - s) - q(s)x \\ x' = Yq(s)x - Dx \end{cases}$$

donde $s(t)$ y $x(t)$ representan las concentraciones del sustrato y de la biomasa microbiana a tiempo t, respectivamente. La constante positiva s_0 es la concentración del sustrato en el medio que ingresa al quimiostato, la constante positiva D es la tasa a la que el medio entra o sale del quimiostato, y la constante positiva Y es la constante de rendimiento. La función $q(s)$ es la tasa con la cual los microbios consumen el sustrato.

Para el siguiente ejemplo de crecimiento microbiano, halle todos sus puntos de equilibrio y analice su estabilidad.

$$\begin{cases} s' = 2(4 - s) - \dfrac{3s}{1+s}x \\ x' = \dfrac{3s}{1+s}x - 2x \end{cases}$$