Matemática I (B) — 2^{do} cuatrimestre de 2019

Práctica 3 — Curvas y funciones en varias variables

Sugerencia. *A partir de esta práctica, en aquellos ejercicios que indiquen graficar, se recomienda utilizar un software apropiado, como Geogebra, tanto para corroborar lo graficado como para realizar el gráfico cuando no sea posible hacerlo manualmente.*

Curvas

1. Grafique las siguientes curvas paramétricas para t en los intervalos indicados:

a) $\sigma(t) = (3t, -t); \quad 0 \le t \le 1, \quad -1 \le t \le 3.$

b) $\sigma(t) = (3t+2, -t+3); \quad 0 \le t \le 1, \quad -1 \le t \le 3.$

c) $\sigma(t) = (t^3, t^2); \quad -2 \le t \le 2.$

d) $\sigma(t) = (t^2, t^2); \quad 0 \le t \le 1, \quad -1 \le t \le 1.$

e) $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)); \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

f) $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t)); \quad 0 \le t \le 10.$

g) $\sigma(t) = (3t+2, -t+3, t+1); \quad 0 \le t \le 1.$

h) $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t); \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 2\pi \le t \le 4\pi.$

2. Determine el dominio de las siguientes curvas paramétricas, y grafíquelas.

a) $\sigma(t) = (3t+2, -t+3)$

b) $\sigma(t) = (e^{2t}, -2e^{2t})$

c) $\sigma(t) = (e^t, -e^{2t})$

d) $\sigma(t) = (e^{-3t}, 5e^{3t})$

e) $\sigma(t) = (t, t^2)$

f) $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$

g) $\sigma(t) = (t\cos(t), t\operatorname{sen}(t))$

h) $\sigma(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t))$

i) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t)$

j) $\sigma(t) = (t, \ln(t))$

3. Encuentre dos parametrizaciones para cada una de las siguientes curvas:

a) $x = 7,\ -1 \le y \le 3$

b) $x = y + 2$

c) $y = \ln(x)$

d) $x = y^2 + 1$

e) $x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0$

f) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. Determine los vectores velocidad y aceleración para las siguientes curvas paramétricas. Halle la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor de t_0 dado, y grafique la recta junto con la curva cerca del punto.

a) $\sigma(t) = (3t+2, -t+3), \quad t_0 = 1.$
b) $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$
c) $\sigma(t) = (t^3, t^2), \quad t_0 = 1.$
d) $\sigma(t) = (\cos(t) + \operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen}(t) + \cos(2t)), \quad t_0 = 0.$
e) $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t_0 = 1.$
f) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t_0 = 1.$

Para los ítems 4*a*, 4*b*, 4*c* y 4*d*, halle la ecuación de la recta normal a la curva en dichos puntos y grafique.

5. Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, hasta que sale por la tangente en $t_0 = 1$, luego de lo cual no actúan fuerzas sobre ella. Halle la ubicación de la partícula en $t_1 = 2$.

6. Grafique el punto cuyas coordenadas polares $(r; \theta)$ son las siguientes:

a) $(1; \frac{\pi}{2})$ *b)* $(3; 0)$ *c)* $(2; -\frac{\pi}{4})$

Para cada uno de estos puntos, halle otros dos pares de coordenadas polares que los representen.

7. Grafique las siguientes curvas polares, $(r(t); \theta(t))$:

a) $(t; \frac{\pi}{4}), \quad 0 \leq t \leq 2.$
b) $(2; t), \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$
c) $(t; t), \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$
d) $(1 - \operatorname{sen}(t); t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
e) $(\cos(2t); t), \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$
f) $(2; \pi - 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
g) $(e^t; \pi - 2t), \quad 0 \leq t \leq 8\pi.$
h) $(e^{-3t}; \pi - 2t), \quad 0 \leq t \leq 8\pi.$

8. Encuentre una parametrización, en coordenadas polares, para cada una de las siguientes curvas:

a) $y = -x, \quad y > 0$
b) $y = -x, \quad y < 0$
c) $x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \geq 0$
d) $x^2 + y^2 = 9, \quad x \geq 0$

9. *a)* Dada la curva $\sigma(t)$ cuyas coordenadas polares están dadas por $(r(t); \theta(t))$, muestre que su vector velocidad (en coordenadas cartesianas) está dado por:

$$\sigma'(t) = \Big(r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\operatorname{sen}(\theta(t))\,\theta'(t),$$
$$r'(t)\operatorname{sen}(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t))\,\theta'(t)\Big).$$

b) Halle el vector velocidad de cada una de las siguientes curvas $\sigma(t)$ cuyas coordenadas polares están dadas por $(r(t); \theta(t))$:

I. $(t; \frac{\pi}{4})$ II. $(1; \frac{\pi}{4}t)$ III. $(2t; \frac{\pi}{4}t)$

c) En cada una de las curvas del ítem anterior, halle la recta tangente en el punto correspondiente a $t_0 = 1$.

10. Consideremos el vuelo de una mosca. Cuando sopla viento podemos descomponer la velocidad de la mosca respecto a tierra $\vec{v}_t$ en términos de la velocidad del viento $\vec{v}_V$ y la velocidad respecto al aire $\vec{v}_a$. Más precisamente, se tiene que $\vec{v}_t = \vec{v}_a + \vec{v}_V$.

Supongamos que la trayectoria de la mosca, en coordenadas polares, está dada por $(r(t); \theta(t)) = (2t; \frac{\pi}{4}t)$, de manera que el vector velocidad $\vec{v}_t$ es el que calculamos en el Ejercicio 9*b*iii. Si las coordenadas polares de $\vec{v}_V$ son $(2; \frac{\pi}{6})$, ¿cuáles son las coordenadas cartesianas de $\vec{v}_a$?

11. Un péndulo realiza pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio, describiendo la siguiente trayectoria dada en coordenadas polares: $(r(t); \theta(t)) = (1; \frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{2}t))$. Halle la velocidad angular, $\omega(t) = \theta'(t)$, y la aceleración angular, $\alpha(t) = \omega'(t)$.

Funciones de 2 y 3 variables

12. Determine y grafique el dominio para cada una de las siguientes funciones. Grafique, si es posible, las curvas de nivel $f(x,y) = c$, para cada uno de los valores de c indicados.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad c = 1, \quad c = 4, \quad c = 9, \quad c = -1$

b) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, \quad c = \sqrt{5}, \quad c = -1$

c) $f(x,y) = \ln(y - x^2), \quad c = 0, \quad c = 1$

d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad c = 1, \quad c = \frac{1}{e}, \quad c = 4, \quad c = 0$

e) $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}, \quad c = 0, \quad c = 5$

f) $f(x,y) = \dfrac{x + y}{x - y}, \quad c = 0, \quad c = 5$

En los casos 12*b* y 12*d*, grafique *todas* las curvas de nivel, y con esta información esboce el gráfico de la función.

13. Grafique las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones, y determine cuáles de estas superficies son el gráfico de una función $z = f(x,y)$.

a) $z = 2x^2 + y^2$

b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$

c) $3x + 2y - z = 0$

d) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 2$

14. Para distintos valores de c, grafique las superficies de nivel $f(x,y,z) = c$.

a) $f(x,y,z) = x + y + z$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

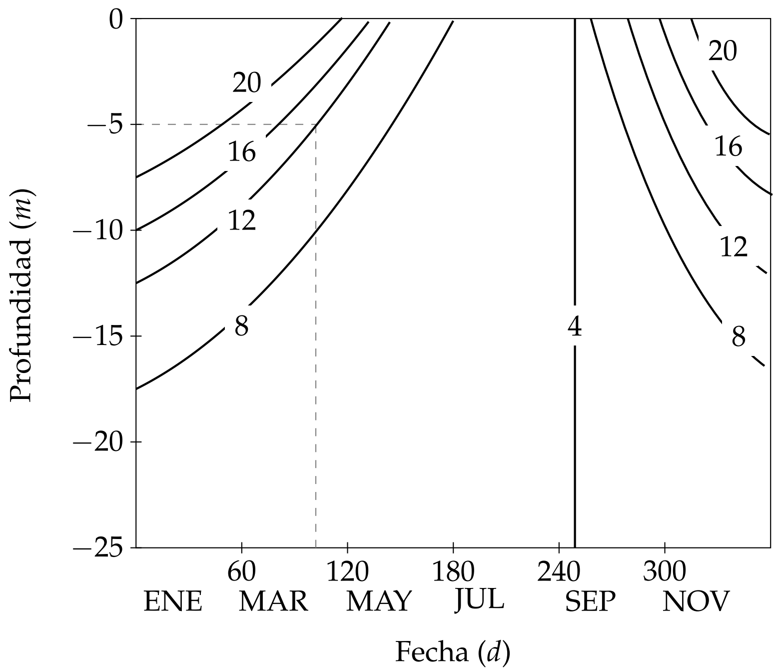
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

d) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$

f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z}$

15. El gráfico de la siguiente figura muestra las isotermas de un cierto lago. Las isotermas son curvas de igual temperatura, es decir, curvas de nivel. Por ejemplo, en el día 100 (10 de abril), la temperatura a 5 metros de profundidad fue de aproximadamente 12ºC.



a) Use este gráfico para aproximar los perfiles de temperatura en marzo y septiembre. Es decir, grafique la temperatura en función de la profundidad para una fecha en marzo y para una fecha en septiembre.

b) Análogamente, grafique la temperatura en función del día a 5 y a 15 metros de profundidad.