Matemática 2 (B)
Segundo Cuatrimestre - 2019

# Práctica 7: Análisis de Fourier

1. Dadas las siguientes señales periódicas hallar su período mínimo, amplitud y fase:

   (a) $x(t) = 4\sin(2\pi t/3 + \pi/2)$
   (b) $x(t) = 2\sin(\pi t + \pi/2) + 3/2\sin(\pi t + \pi/2)$
   (c) $x(t) = 4\sin(t + \pi)$

   Recordar que si $x(t) = Asen(2\pi t/T + \varphi)$ $A$ es su amplitud, $T$ es su período y $\varphi/2\pi$ su fase inicial.

2. Probar las siguientes propiedades de las señales periódicas:
   Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos señales $T$-periódicas, entonces

   (a) $x_1(t) + x_2(t)$ y $x_1(t)x_2(t)$ son $T$-periódicas.
   (b) $x_3(t) = x_1(-t)$ es $T$-periódica.
   (c) $x_3(t) = x_1(t - \tau)$ es $T$-periódica para todo $\tau \in \mathrm{R}$.
   (d) $x_3(t) = x_1(t/\lambda)$ es $\lambda T$- periódica para todo $\lambda > 0$

3. Escribir un programa en Python que reciba una lista con los valores que toma una señal en $N$ puntos, y devuelva la transformada discreta del vector formado por esos valores.

4. (a) Escribir un programa en Python que reciba una función f, el valor de su período T y N el número de puntos a considerar, y devuelva la transformada del vector formado por N puntos equiespaciados del intervalo $[0, T]$ evaluados en la función $f$.
   (b) Usar el programa anterior para obtener la transformada discreta de la señal $f(t) = \sin(2\pi t)$ con $N = 10$ y 11. Considerar $T = 1$.
   (c) Repetir el item anterior con $f_1(t) = \sin(4\pi t)$, $f_2(t) = \cos(2\pi t)$ y $f_3(t) = \cos(4\pi t)$.
   (d) En cada uno de los casos anteriores, determinar información contiene el vector $\widehat{\mathbf{x}}$ sobre los coeficientes de Fourier de las señales correspondientes.

5. Sea $x(t)$ la señal periódica triangular dada por $x(t) = 1 - 4|t|$, si $t \in [-1/2, 1/2]$. Usando el programa definido en el ejercicio anterior, comparar los valores de $c_1$, $c_7$ y $c_3$ con $\widehat{x}_1$, $\widehat{x}_7$ y $\widehat{x}_{-3}$ para $N = 2^4$,$2^{10}$ y $2^{14}$ .

   Observar que $|x_k - c_k|$ y $|x_{N-k} - C_{-k}|$ tienden a 0 si $0 \leq k < N/2$

6. Considerar la señal triangular de período $T = 1$ dada por $x_T(t) = 1 - 4|t|$, si $t \in [-1/2, 1/2]$ y la señal cuadrada dada por $x_c(t) = 1$ si $t \in [-1/2, 0]$ y $x_c(t) = -1$ si $t \in (0, 1/2]$. Calcular los coeficientes de Fourier para $n = 1, 3, 9, 15$ y graficar en cada caso la señal junto a su polinomio trigonométrico. Qué puede decir sobre la convergencia?.

7. Considerar la señal de período $T = 1$ con $n = 3$ dada por

$$x(t) = 2e^{-6i\pi t} + 4e^{-4i\pi t} + 3e^{-2i\pi t} + 4 - e^{2i\pi t} + e^{4i\pi t} - 3e^{6i\pi t} \tag{1}$$

   (a) Usar el programa del ejercicio 4 con $N = 10$ para calcular $\widehat{\mathbf{x}}$. Determinar qué representa cada una de las coordenadas del vector $\widehat{\mathbf{x}}$.

   (b) Repetir el item anterior con $N = 6$. Qué está sucediendo?

8. Considerar las señales 1-periódicas dadas por $x(t) = 2 + \cos(2\pi t)$ e $y(t) = 2 + \cos(14\pi t)$

   (a) Sin hacer cuentas determinar el valor de $n$ y de los coeficientes de Fourier en cada caso.

   (b) En un mismo gráfico graficar $x(t)$ e $y(t)$. Usando el programa del ejercicio 4 calcular $\widehat{\mathbf{x}}$ y $\widehat{\mathbf{y}}$. Qué observa? (*este fenómeno se conoce como solapamiento*).

   (c) Repetir el item anterior para $N = 16$. Puede asegurar que los vectores $\widehat{\mathbf{x}}$ y $\widehat{\mathbf{y}}$ contienen la información necesaria para obtener los coeficientes de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$?.